Årg. 42:2 Juni 1959

ELEMENTA

Tidskrift för matematik, fysik och kemi

ANDRA HÄFTET

ALLAN BERGSTEDT, Čerenkovstrålning. Nobelpriset i fysik 1958 81

JAKOB LUNDSTRÖM och AGNE WAHLGREN, Magiska kuber 89

INGVAR KARLÉN, Hur gammal är Jorden? 93

SVEN HILDING, Falska rötter — en logisk och metodisk fråga 105

BIRGER GRUNDSTRÖM, Iakttagelser, språk och förklaringar i fysiken 109

STIG OSSIAN ERICSON och STIG HOLMQUIST, Framställning av Na_3MnO_4 som lektionsförsök 117

Aktuellt: Föreningarna för matem.naturv. undervisning i Göteborg och Lund av PER HÄGGMARK och STIG ANDERSSON 118

Bokanmälningar: WEINACHT, Prinzipien zur Lösung mathematischer Probleme; DERWIDUÉ, Introduction à l'algèbre supérieure et au calcul numérique algébrique; FORSYTHE, Contemporary State of Numerical Analysis; ROSENBLOOM, Linear Partial Differential Equations; LEWIN, Dilogarithms and Associated Functions; TAYLOR, Introduction to Functional Analysis; DUGUÉ, Traité de statistique théorique et appliquée; DUGUÉ, Arithmétique des lois de probabilités; SIRK, Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker; MYERS, Theoretical Electromagnetism; Calculus of Variations and its Applications (Symposium); HÖFLING, Physik-Aufgaben; STREETER, Fluid Mechanics; COMOLET, Introduction à l'analyse dimensionelle; Elasticity and Plasticity, Surveys in Applied Mathematics; BISHOP, Project Sherwood; FISCHER/MANSUR, Conference on Extremely High Temperatures; SINNOTT, The Solid State for Engineers; ZWORYKIN/RAMBERG/FLORY, Television in Science and Industry; WALSH, Photometry; SHEPHERD, An Introduction to the Theory and Practice of Semiconductors; JELLEY, Čerenkov Radiation and its Applications; ELLIOT, The Physical Chemistry of Steelmaking; Matematikkarta; BENDAT, Principles and forts. å omslagets andra sida 119

Problemavdelning:

Matematiska uppgifter (red. av S. BÅGMAN) 140

Matematiska och fysikaliska uppg. i studentexamen mars 1959 142

Realexamen v.t. 1959: Provräkningar 149

Praktisk realexamen v.t. 1959: Uppg. i fysik, Uppg. i kemi med laboratorieteknik, Uppg. i beskrivande maskin- och byggnadslära 152

Författare i detta häfte (omslaget); Insänd litteratur (annonsbladet vid sid. 93)

Annonsörer: Almqvist & Wiksell; Rudolph Grave; Norstedt & Söner; Svenska Bokförlaget; Svenska Radiobolaget.

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

ELEMENTA

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Prenumeration sker genom inbetalning å postgiro 527 55; pr år kr. 15:—, pr häfte kr. 4:25. Tidskriften sändes som utgivarkorsband.

Red. och utgivare: fil. dr C. E. Blom, Karlbergsv. 16, Stockholm.

Tidigare årg. Förfråga Eder direkt hos red. Av årg. 1—13 är flera ofullständiga. Priset pr årg. (i häften) är för årg. 14 (1931) t.o.m. 34 (1951) kr. 10:—, för årg. 35—38 kr. 12:50, för årg. 39—41 kr. 15:—.

Pärmar av grön klot à 3:—+25 öre i porto; varje pärm avsedd för två årg.

Problemhäften för åren 1943—52 à kr. 1:20, för 1953—1955 à kr. 1:40, för 1956—1958 à kr. 2:20. Innehåll: Student- o. realex.-uppg. i matem. o. fysik med svar och anvisningar.

Särtryck ur ELEMENTA:

2. M. Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 2:—.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 2:—.
6. S. Comét, Matrisräkning. Slut.
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2:40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 2:—.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 2:60.
10. L. G. Sillén, Kemistens hjärna - ett utrymmesproblem, kr. 2:—.
11. C.-E. Fröberg—G. Kjellberg—O. Boivie, Siffermaskiner och hålkortsmaskiner, kr. 3:—.
12. Karin Aurivillius, Analysvågen, kr. 2:40.
13. Uno Trägårdh, Primär- och sekundärelement, kr. 2:40.
14. K.-B. Augustinsson, Enzymkemi, kr. 2:60.

De nya skrivningstyperna i matematik

i studentex., som ges fr. o. m. mars 1957, finner Ni i »Problemhäfte 1957» och »Problemhäfte 1958» men även i »Problemhäfte 1956», som innehåller Skolöverstyrelsens »Övningsuppg. i matematik till studentexamen». Pris pr häfte kr. 2:20.

Problemhäften och övriga särtryck skickas per post (porto 15 öre per häfte), om inbetalning sker till Elementas postgiro 527 55 (skriv rekvisition å giro-kupongen).

Bokanmälningar (forts.): Applications of Random Noise Theory; Sexton, Chemische Konstitution und biologische Wirkung; Rice, Free Radicals; Newbury, The Teaching of Chemistry; Berättelse över 3:e Nordiska kongressen LMFK (augusti 1957); Kosmos Bd 36,1958.

Författare i detta häfte: professor B. J. Andersson, Stockholm; fil. dr J. Andersson, Vaxholm; lektor S. Andersson, Lund; docent K.-B. Augustinsson, Stockholm; civiling. A. Bergstedt, Stockholm; docent G. Blom, Malmö; laborator Y. Domar, Uppsala; lektor O. Eklöf, Uppsala; lärov. adj. S. O. Ericson, Uppsala; laborator C.-E. Fröberg, Lund; lektor B. Grundström, Djursholm; fil. lic. G. Günther, Stockholm; lektor S. Hilding, Stockholm; tekn. lic. M. Hillert, Stockholm; förste assistent S. Holmquist, Uppsala; lektor P. Häggmark, Göteborg; fil. kand. I. Karlén, Uppsala; lektor A. Ljunghall, Uppsala; fil. lic. D. Lundqvist, Stockholm; byrådirektör J. Lundström, Stockholm; docent L. Melander, Stockholm; lektor E. Nordefeldt, Stockholm; professor F. Odqvist, Stockholm; fil. lic. H. Riesel, Stockholm; lektor L. Råde, Göteborg; professor K. Siegbahn, Uppsala; docent E. Staffansson, Göteborg; professor N. Svartholm, Göteborg; lektor I. Svensson, Göteborg; lektor A. Wahlgren, Stockholm; laborator L.-H. Zetterberg, Stockholm.

Fredrik Ehrnst

MATEMATIK

för reallinjens första ringar

RI[4]—RII[4] och RI[3]

»Författaren har lagt ned ett utmärkt arbete på boken och åstadkommit en förtjänstfull lärobok.»

Läroboksnämndens granskare

Inb. 13:75 (10:31)

Tidigare har utkommit:

Fredrik Ehrnst

MATEMATIK

för reallinjens biologiska gren

RIII[4]—RIV[4] och RII[3]—RIII[3]

- Samtliga kursmoment för realgymnasiets biologiska gren samlade i en enda lärobok
- Innehåller analytisk geometri och rymdgeometri, funktionslära och grunderna för matematisk statistik
- Illustrerad med ett stort antal figurer

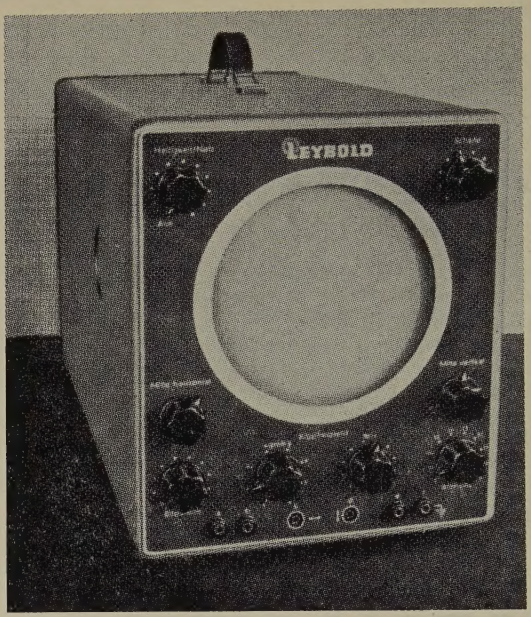
Hft. 10:70 (8:03)

Beställ lärarex. genom att sätta in beloppet (pris inom parentes) på postgiro 758. Ange på talongen vad beställningen avser.

ALMQVIST & WIKSELL

Box 159 — Stockholm 1 — Postgiro 758

AWE



LEYBOLDS OSCILLOSKOP
FÖR SKOLOR

Bildskärmens stora diameter, 16 cm, åskådliggör förlopp även på stora avstånd och i ljust klassrum.

LEYBOLDS SOMMARKURSER I FYSIK 1959

Kontakta oss för närmare upplysningar

TAG KVALITET • TAG LEYBOLD

RUDOLPH GRAVE AB

SKOLAVDELNINGEN

Box 3082, Malmskillnadsg. 48 c, Stockholm 3, Tel. 23 37 80

Box 4158, St. Nygatan 27 b, Malmö 4, Tel. 381 25

Čerenkovstrålning

Nobelpriset i fysik 1958

Av civilingenjör Allan Bergstedt, Stockholm

Nobelpriset i fysik för år 1958 har av Vetenskapsakademien tilldelats professorerna P. A. Čerenkov, I. M. Frank och I. J. Tamm för deras experimentella och teoretiska arbete för klarläggande av den s. k. Čerenkov-effektens natur. Pristagarna är alla knutna till sovjetiska vetenskapsakademiens forskningsinstitut för fysik i Moskva, det s. k. Lebedevinstitutet.

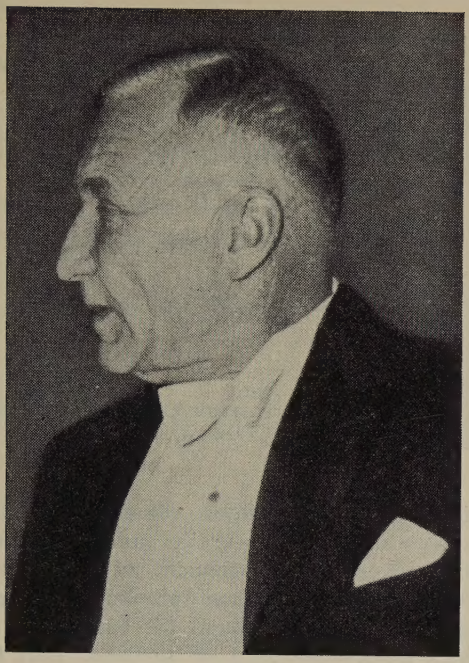
Under 1920- och 1930-talen studerades vid ett flertal laboratorier det svaga, blåvita ljussken, som utsändes från vätskelösningar av främst metallsalter vid bestrålning med alfa-, beta- eller gammastrålar. I början av 30-talet inledde P. Čerenkov en serie experiment rörande detta ljus och utförde därvid undersökningar även med de rena lösningsmedlen. Vid absorption av snabba, elektriskt laddade partiklar joniseras och exciteras atomerna i det material partiklarna passerar. De exciterade atomerna återgår ofta till grundtillståndet under utsändande av ljus, och denna luminiscensstrålning får en spektral fördelning och avklingningstider som är karakteristiska för absorbatormaterialet. Čerenkov fann dock att även de rena vätskorna utsänder ett svagt ljus vid bestrålning med gammastrålar, trots att de rena vätskorna ej kunde väntas alstra någon luminiscensstrålning. Bland de vätskor som undersöktes var destillerat vatten, xylol, toluol och glycerin. I de första experimenten [1] fann Čerenkov att denna strålnings spektrala fördelning var nästan oberoende av vilket slags vätska som bestrålades och att tillsats av kända fluorescensdämpande ämnen såsom silvernitrat ej påverkade strålningens intensitet. Ej heller påverkades denna av vätskans temperatur, vilket kunde väntas om effekten utgjordes av luminiscensstrålning. Han fann också, att strålningen var svagt polariserad (ca 20 %) med den elektriska vektorn i samma riktning som den inkommande gammastrålningen.

Dessa inledande experiment utförde Čerenkov med en försöksanordning som schematiskt avbildas i fig. 1. Ett radiumpreparat om 104 millicurie placerades i kanalerna R_1 eller R_2 intill en skål med vätskan A. Det i vätskan alstrade ljuset kunde observeras via en kollimator, en bländare D, en gråkil W och ett Nicholsprisma N. Gråkilen användes för intensitetsjämförelser mellan olika vätskor, varvid preparatet placerades under skålens botten. Nicholsprismat an-

Pavel Čerenkov Ilja Frank

vändes för undersökning av ljusstrålningens polarisation med preparatet vid skålens vägg. Färgfilter F kunde även insättas i ljusstrålens väg för att erhålla en grov uppskattning av ljusets spektrala fördelning. Ljusintensiteten var utomordentligt låg och fordrade adaptation av ögat i mörker under någon timme.

Resultaten av experimenten visade att effekten ej kunde utgöras av ett luminiscensfenomen. Samtidigt med Čerenkovs första meddelande (1934) föreslog Vavilov att effekten möjligen kunde bero på bromsstrålning från de Comptonelektroner, som uppstår vid gammastrålningens absorption. Denna förklaring av ljuseffekten visades vara ohållbar bl. a. på grund av att denna ej hade bromsstrålningens spektrala fördelning och vinkelfördelning. Att ljuset dock alstrades av de sekundära elektronerna och ej av gammastrålningen direkt visade Čerenkov i en undersökning år 1936 över ett magnetfälts inverkan på den exciterande strålningen. Detta bekräftades genom en undersökning publicerad 1937, i vilken han visade att effekten även erhölls vid betastrålar.



Igor Tamm

Av intresse är att den franske fysikern L. Mallet redan 1926 [2] publicerade resultat av undersökningar över ljusemissionen hos vatten och rena organiska vätskor som bestrålades med gammastrålar. Han var den förste som observerade att ljusstrålningen hade ett kontinuerligt spektrum och ej ett bandspektrum som är karakteristiskt för fluorescensstrålningen. Mallet fann ej någon asymmetri i ljusets vinkelfördelning och gjorde ej några försök att mäta dess polarisation. Mallets resultat synes dock ej ha beaktats och det var först sedan Čerenkov återupptäckt fenomenet och detta teoretiskt förklarats av Frank och Tamm som ytterligare teoretiska och experimentella arbeten rörande denna ljuseffekt utfördes.

Den teoretiska tolkningen av Čerenkoveffekten publicerades av Frank och Tamm år 1937 [3]. Resultatet av deras analys bekräftade de av Čerenkov experimentellt funna egenskaperna hos denna strålning och gav dessutom viktiga upplysningar främst beträffande ljusstrålningens vinkelberoende och intensitetens beroende av mediets brytningsindex och partikelns hastighet. Den enligt teorien förutsagda

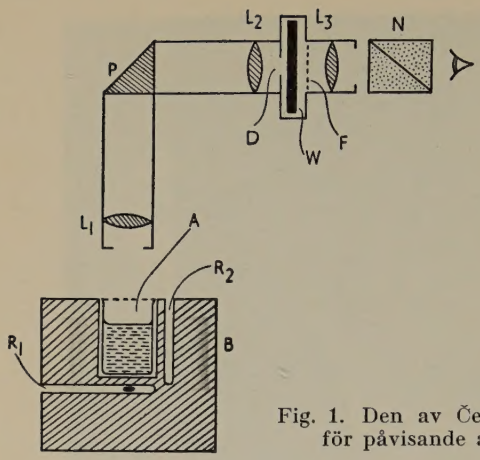


Fig. 1. Den av Čerenkov använda apparaturen för påvisande av Čerenkovstrålning. [7].

asymmetrien hos Čerenkovstrålningen, vilken innebär att ljuset emitteras i samma riktning som den exciterande partikelns rörelseriktning, verifierades genom nya experiment av Čerenkov.

Enligt Franks och Tamms teori kan Čerenkovstrålningen sägas vara den elektromagnetiska motsvarigheten till bogvågen från ett fartyg eller den koniska tryckvågen från en projektil som har överljudshastighet. Under antagande att den laddade partikeln rör sig med den konstanta hastigheten $v=\beta c$ (c=ljusets hastighet i vakuum) i ett medium med brytningsindex n, visade Frank och Tamm med utgångspunkt från Maxwells ekvationer att ljus utsändes i en riktning, som bildar en viss vinkel θ med partikelns rörelseriktning. Denna vinkel erhålles ur relationen

$$\cos\theta=\frac{1}{\beta n} \tag{1}$$

Utsändande av ljus sker således endast om partikelns hastighet är större än ljusets fashastighet ($=c/n$) i mediet, dvs. om $\beta>1/n$. Vid gränshastigheten har det utsända ljuset samma riktning som partikelns rörelseriktning. För ljusemission fordras givetvis att $n>1$, emedan partikelns hastighet ej kan överstiga ljushastigheten i vakuum. Detta betyder att röntgenstrålning ej kan utsändas, då ju brytningsindex alltid är mindre än 1 för denna. Däremot utsändes radiovågor, för vilka $n=(\varepsilon)^{1/2}$, där ε=dielektricitetskonstanten. Senare har Cox [4] på ett enklare sätt härlett

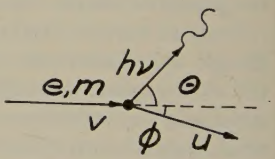


Fig. 2.

villkoret (1) genom att liksom vid Comptoneffekten betrakta rörelsemängd och energi hos den laddade partikeln och det utsända ljuskvanta eller fotonen. Enligt fig. 2 har den laddade partikeln med vilomassan m hastigheten v före, respektive $u=\beta_1 c$ efter utsändande av ljuskvantat med energien $h\nu$ under vinkeln θ i förhållande till partikelns ursprungliga rörelseriktning. Dess nya rörelseriktning bildar vinkeln φ med dess tidigare. Ljusets våglängd i mediet är $\lambda=c/n\nu$ och fotonens rörelsemängd är h/λ.

Ekvationerna för rörelsemängden blir då

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{mu}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\cos\varphi+\frac{h}{\lambda}\cos\theta$$

och

$$\frac{h}{\lambda}\sin\theta=\frac{mu}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\sin\varphi$$

Energiekvationen blir

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}}+h\nu$$

Ur dessa ekvationer erhålles

$$\cos\theta=\frac{1}{\beta n}+\frac{h(n^2-1)}{2\lambda m v n^2}\sqrt{1-\beta^2}$$

Den sista termen kan visas vara mycket liten, och man erhåller således villkoret (1).

Den av partikeln per längdenhet av sin bana utstrålade energien är enligt Frank och Tamms teori

$$\frac{dw}{dl}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right)\omega\,d\omega \text{ watt/m}, \qquad (2)$$

där e är partikelns laddning (As), ε_0 dielektricitetskonstanten för vakuum och $\omega=2\pi\nu$ är ljusets vinkelfrekvens. Integralen utsträckes över de frekvensområden för vilka $\beta n>1$. För elektroner av 100 MeV energi blir energiförlusten på grund av Čerenkovstrålningen ca 1 keV per cm. Denna energiförlust är omkring 1000 gånger mindre än den som uppstår genom jonisation och excitation i absorbatorn. Inom ett frekvensområde där n är konstant, dvs. utan dispersion, är enligt (2) Čerenkovstrålningens intensitet proportionell mot $\nu d\nu$, eller då $\nu=\frac{c}{\lambda n}$, mot $\frac{1}{\lambda^3}d\lambda$. Denna spektrala fördelning hos det emitterade ljuset bekräftades genom mätningar av Čerenkov 1938.

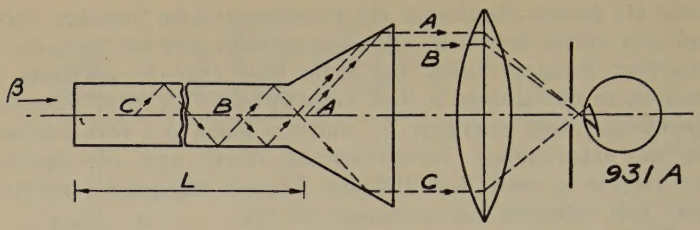


Fig. 3. Den av Getting föreslagna Čerenkovdetektorn.

Tillämpningar

Čerenkoveffekten har på senare tid fått en mycket viktig tillämpning i detektorer för energirika, laddade partiklar i den kosmiska strålningen och från de moderna partikelacceleratorerna. I sådana Čerenkovdetektorer registreras den skur av fotoner som en enda inkommande partikel alstrar medelst en fotomultiplikator. Denna består av ett fotokänsligt skikt, sammanbyggt med en elektronmultiplikator i samma rör. De från fotoskiktet emitterade elektronerna förstärkes ca 10^6 gånger genom sekundäremission i ett flertal steg i elektronmultiplikatorn.

Den förste som föreslog en sådan partikelräknande detektor var Getting [5]. Denna detektor finnes avbildad i fig 3. Den består av en ca 20 cm lång stav av plexiglas (n=1,5), skarvad med en stympad kon av samma material. En vid stavens ändyta inkommande partikel som går parallellt med stavens axel utsänder ljus i en riktning som bildar vinkeln θ med stavens axel, där θ erhålles ur villkoret (1). Väljes konens öppningsvinkel = θ blir de utträdande strålarna parallella och kan av en lins samlas på den fotokänsliga katoden hos fotomultiplikatorn 931 A. Den elektriska puls som erhålles från fotomultiplikatorn är mycket kort. Dess längd bestämmes i de flesta fall av spridningen av elektronernas banor i multiplikatorn och ej av fotonutsändningen under nedbromsningen av partikeln. Denna senare process sker utomordentligt snabbt, ca $5 \cdot 10^{-12}$ sek, och beror av absorbatorns dispersion.

Den egenskap hos Čerenkoveffekten som ofta utnyttjas för detektorer är att ljusemissionen endast sker för partiklar över en viss hastighet, och att ljuset har en riktning som enligt (1) beror av partikelns hastighet. På denna princip har ett flertal hastighets- eller energiselektiva Čerenkovdetektorer konstruerats. En sådan konstruktion angavs 1951 av Marshall [6] och finnes avbildad i fig. 4. Genom hålet i blyskärmen A kommer snabba elektroner från en betatron. Dessa träffar radiatorn B, som är gjord av plexiglas, och som är

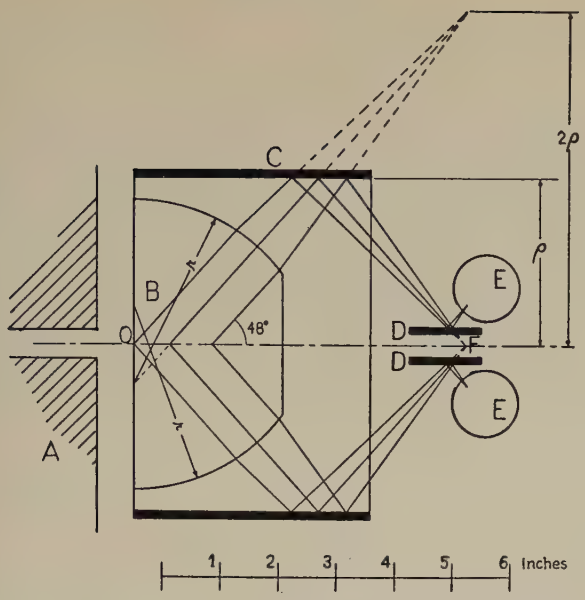


Fig. 4. En av Marshalls första energiselektiva Čerenkovdetektorer. [6].

utförd i form av en linskropp med en krökningsradie r så att Čerenkovstrålningen fokuseras i en ring på avståndet 2ϱ från radiatorns axel. På avståndet ϱ befinner sig en cylindrisk spegel som kastar ljuset tillbaka mot symmetriaxeln. Här kan den ljuskänsliga katoden i fotomultiplikatorn placeras. För att nedbringa bruset använde Marshall dock två rör E i koincidenskoppling, till vilka ljuset reflekterades via de två speglarna D. Genom att förskjuta dessa och fotomultiplikatorerna längs anordningens axel kunde inställning för olika vinklar θ eller olika hastighet hos partiklarna göras. Senare har denna princip förfinats, och hastighetsselektiva Čerenkovdetektorer har utförts med en upplösning av $\pm 0{,}5°$. Detta innebär ett fel av någon MeV vid uppmätning av energien hos en protonstråle vid 340 MeV.

Flera andra tillämpningar av Čerenkoveffekten har föreslagits. Bland dessa kan nämnas detektorer för kontroll av vattenkylda reaktorer, framställning av standardljuskälla med noggrant känd intensitet och spektral fördelning (Belcher 1953) och generering av radiovågor med våglängder omkring 1 mm (Ginsburg 1947). För dessa och andra tillämpningar hänvisas den intresserade läsaren till Jelleys utmärkta

monografi över Čerenkovstrålningen [7] samt till docent G. Ekspongs artikel i Kosmos Bd 36 [8].

Pavel A. Čerenkov är född år 1904 och sedan 1936 anställd vid Lebedevinstitutet, där han från och med 1946 är avdelningschef. De undersökningar, som ledde till den prisbelönta upptäckten av Čerenkoveffekten, inledde han vid S I. Vavilovs institut i Leningrad.

Ilja M. Frank föddes år 1908. Sedan 1934 är han knuten till Lebedevinstitutet. Han är även professor vid Moskvas universitet och blev 1946 korresponderande ledamot av sovjetiska vetenskapsakademien.

Igor J. Tamm är född 1895. Han är professor vid Moskvas universitet, där han anställdes 1924. Tamm är även chef för Lebedevinstitutets teoretiska avdelning och ordinarie ledamot av sovjetiska vetenskapsakademien. Han innehar en rad höga utmärkelser, bland dessa Stalinpriset.

Litteratur

1. P. A. Čerenkov, Doklady Akad. Nauk SSSR, *2*, 451 (1934).
   — Doklady Akad. Nauk SSSR *14*, 101 (1937).
   — Doklady Akad. Nauk SSSR *14*, 105 (1937).
2. L. Mallet, C. R. Acad. Sci., *183*, 274 (1926).
   — C. R. Acad. Sci., *187*, 222 (1928).
3. I. M. Frank och I. J. Tamm, Doklady Akad. Nauk SSSR, *14*, 107 (1937).
   L. I. Schiff, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, 261 (1949).
4. R. T. Cox, Phys. Rev., *66*, 106 (1944).
5. I. A. Getting, Phys. Rev., *71*, 123 (1947).
   A. Bergstedt, Čerenkov-detektorn, Elementa, *31*, 233 (1948).
6. J. Marshall, Phys. Rev., *81*, 275 (1951).
7. J. V. Jelley, Čerenkov Radiation and its Applications, Pergamon Press (1958).
8. G. Ekspong, Kosmos, Bd 36, 1958, sid. 5—29.

Bilderna på sid. 82 och 83 är från Nobelfesten i Stockholm i dec. 1958.

Magiska kuber

Av byrådirektör Jakob Lundström och lektor Agne Wahlgren

Talen 1, 2 ... 27 placeras i de 8 hörnen i en kub, i de 12 kanternas och de 6 sidoytornas mittpunkter samt i kubens mittpunkt. Dessa tal bildar tre och tre inalles 27 rader parallella med kubens kanter och 4 diagonaler genom kubens mittpunkt och motstående hörn. Om då summan av de tre talen blir densamma i varje rad och diagonal, säges talen bilda en magisk kub av graden 3. (Man kan även tänka sig rymdgitter med 4, 5 ... tal i varje rad, bildande magiska kuber av graden 4, 5 ..)

Summan av alla talen är $S=\frac{1}{2}\cdot 27\cdot 28$. Summan för varje rad och diagonal skall således vara $S/9=42$. Vi minskar alla talen med 14, så att talen 0, ± 1 ... ± 13 erhålles, och skall till en början bilda kuber av dessa tal. Den konstanta summan skall då vara 0. De båda följande satserna gäller endast för dessa senare kuber.

Hjälpsats 1. Talet i kubens mittpunkt måste vara 0.

Bevis: Talen i hörnen till en sidoyta är a_1, a_2, a_3, a_4 och i de diagonalt motsatta hörnen i den motsatta ytan a_5, a_6, a_7, a_8. I de båda ytornas mittpunkter och i kubens mittpunkt är talen c_1, c_2, m. Eftersom summan av talen i varje diagonal skall vara 0, är

$$a_1+a_5=a_2+a_6=a_3+a_7=a_4+a_8=-m$$

I mittpunkterna till två motsatta kanter i den första ytan är talen

$$b_1=-(a_1+a_2) \text{ och } b_2=-(a_3+a_4), \because c_1=-(b_1+b_2)=\sum_1^4 a_i$$

På samma sätt erhålles

$$c_2=\sum_5^8 a_i, \because m=-(c_1+c_2)=-\sum_1^8 a_i=4m, \because m=0$$

Av denna sats följer, att talen i ändpunkterna av varje linje genom kubens mittpunkt skall vara desamma med motsatta tecken. Detta gäller närmast för talen c_i i ytornas mittpunkter och a_i i hörnen. Men då talen b_i i kanternas mittpunkter bestämmes av likheter av formen $b_i=-(a_j+a_k)$, gäller det även för dessa tal. Detta innebär, att i en magisk kub utöver de i definitionen angivna diagonalerna gäller den konstanta summan även för diagonalerna i de med ytorna parallella kvadraterna genom kubens mittpunkt.

Hjälpsats 2. Talen i sidoytornas mittpunkter måste vara udda och av talen i en ytas hörn måste tre vara jämna och ett udda.

Bevis: Talen i en ytas hörn är som förut $a_1 \ldots a_4$ och i kanternas mittpunkter $b_1 \ldots b_4$, vartill kommer talen b_5 och b_6 i raderna från t. ex. a_1 och a_2 till $-a_3$ och $-a_4$. Talen i tre ytors mittpunkter är c_1, c_2, c_3. Om dessa väljes så, att ej två av dem är motstående, kommer endast ett av talen i varje par $\pm a$ med bland dessa 13 tal.

Antag först, att antalet udda a_i är jämnt. Då blir c_1 jämnt enligt formeln

$$c_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

Eftersom samma a_i med växlande tecken finnes i varje ytas hörn, blir även c_2 och c_3 jämna. Om alla fyra a_i är jämna eller alla udda, blir alla b_i jämna. Om två a_i är jämna och två udda, blir två b_i jämna och fyra udda, vare sig de jämna a_i är närliggande eller diagonalt motstående i ytan. Totala antalet udda tal blir således resp. 0, 4 och 6. Men av talen 1 ... 13 är 7 udda. Dessa fall är således omöjliga.

Om däremot ett eller tre a_i är udda, blir alla tre c_i udda samt tre b_i jämna och tre udda. För att totala antalet udda tal skall bli 7, skall således endast ett a_i vara udda.

Vi övergår nu till utplacering av talen. I fråga om a_i:s tecken är tre fall tänkbara.

A. En ytas alla hörn har positiva tal.

Det största hörntalet betecknas med x och av de närliggande betecknas det större med u, det andra med v. Det fjärde är y. I fig. 1 ligger u till vänster om v sett från x. Om det större talet ligger till höger, återkommer man till det förra fallet genom spegling av hela kuben i en yta, parallell med någon av kubens ytor. (Jämför sista raden i uppsatsen!) Samma anmärkning gäller de följande figurerna. De positiva talen b_i blir

$$b_1 = x+u, \quad b_2 = x+v, \quad b_3 = y+u, \quad b_4 = y+v, \quad b_5 = x-y, \quad b_6 = u-v$$

av vilka b_1 är störst. Talen i tre ytors mittpunkter är

$$c_1 = x+y+u+v, \quad c_2 = x-y+u-v, \quad c_3 = x-y-u+v$$

av vilka c_1 och c_2 är positiva men c_3 kan vara positivt eller negativt. I varje fall är $c_1 > c_2 > |c_3|$, $c_1 > b_1 > x$ och $b_1 > c_2$.

Då är $c_1 = 13$ och $b_1 = 12$, $\therefore y+v=1$.

Men detta är omöjligt, eftersom y och v är positiva tal.

Till detta fall återgår även: Två närliggande hörn i en yta har positiva tal x, u, de båda andra negativa tal $-y$, $-v$. Ty då är hörntalen i en annan yta x, u, y, v.

B. I en och således i alla sidoytor är talen i den ena diagonalens ändpunkter positiva, i den andras negativa. De positiva hörntalen betecknas efter avtagande storlek med x, y, u, v. De positiva talen i kanternas mittpunkter blir då

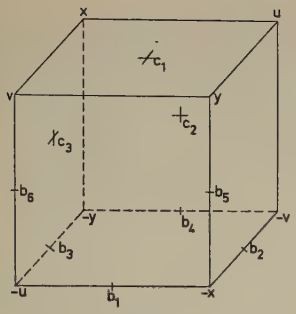


Fig. 1.

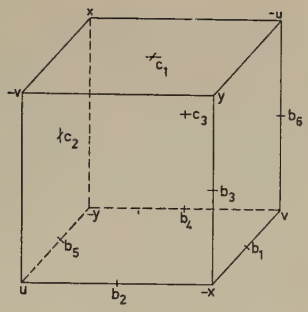


Fig. 2.

$$b_1=x-v,\quad b_2=x-u,\quad b_3=x-y,\quad b_4=y-v,\quad b_5=y-u,\quad b_6=u-v$$

$$\because\ b_1>b_2>b_3,\quad b_1>b_4=b_5+b_6$$

Talen i tre ytors mittpunkter blir

$$c_1=x+y-u-v,\quad c_2=x-y+u-v,\quad c_3=x-y-u+v$$

$$\because\ c_1>c_2>|c_3|$$

1) $u+v>x$

$\because\ x>y>c_1>b_1,\ u>b_1>c_2,\ \because\ x=13,\ y=12$

Närmast i storlek är nu c_1 och u. Men enligt hjälpsats 2 skall c_1 vara udda och u jämnt, eftersom x är udda. Då är $c_1=11$ och $u=10$, varav $v=4$.

$$x, y, u, v=13, 12, 10, 4,\quad b_i=9, 3, 1, 8, 2, 6,\quad c_i=11, 7, -5 \qquad \text{(I)}$$

2) $x>u+v>y$

$\because\ x>c_1>y,\ c_1>b_1,\ \because\ x=13,\ c_1=12$

Förkastas, ty c_1 skall vara udda.

3) $y>u+v$

$\because\ c_1>x>b_1>c_2,\ \because\ c_1=13,\ x=12,\ u+v=y-1$

Närmast i storlek kan nu y eller b_1 vara.

a) $y=11$

$u+v=10,\ \because\ u<10,\ b_1=10,\ v=x-b_1=2,\ u=8$

$$x, y, u, v=12, 11, 8, 2,\quad b_i=10, 4, 1, 9, 3, 6,\quad c_i=13, 7, -5 \qquad \text{(II)}$$

b) $b_1=11$

$\because\ v=1,\ b_5=2,\ c_2=b_1-b_5=9$

Då skulle y eller b_2 bli = 10, ty $y>b_4$ och $c_3<c_2=9$

Men om $y=10$, blir $b_3=2=b_5$ och om $b_2=10$, blir $u=2=b_5$, varför båda fallen är omöjliga.

C. I en och således i alla sidoytorna har talen i tre hörn samma och i det fjärde motsatt tecken. De tre kanterna med positiva hörntal

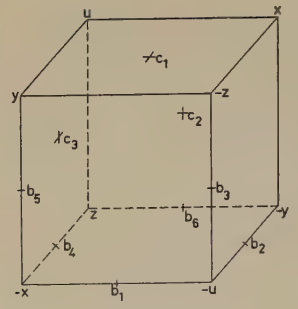


Fig. 3.

möts i u. De tre andra positiva hörntalen är efter avtagande storlek x, y, z. De positiva talen i kanternas mittpunkter är

$$b_1=u+x,\quad b_2=u+y,\quad b_3=u+z,$$
$$b_4=x-z,\quad b_5=x-y,\quad b_6=y-z$$

Talen i tre ytors mittpunkter blir

$$c_1=u+x+y-z,\quad c_2=u+x-y+z,$$
$$c_3=u-x+y+z$$

$$\because\ c_1>c_2>|c_3|,\quad c_1>b_1>x,\quad b_1>c_2>u$$

Då är $c_1=13$, $b_1=12$, $b_6=c_1-b_1=1$, $c_2=b_1-b_6=11$, $y-z=1$.

Sättes $x=z+a$, erhålles

$$b_i=12,\ 13-a,\ 12-a,\ a,\ a-1,\ 1,\quad c_i=13,\ 11,\ 13-2a.$$
$$\therefore\ a\geq 3,\quad u\geq 2,\quad x\leq 10,\quad z\geq 2,\quad \therefore\ a\leq 8$$

Men $a=6$ eller 7 ger $c_3=\pm 1=\pm b_6$.

1) $a=3$

$b_i=12, 10, 9, 3, 2, 1,\quad c_i=13, 11, 7$

De återstående talen ger $x, y, z, u=8, 6, 5, 4$ (III)

i överensstämmelse med villkoren

$$y-z=1,\quad x-z=a \qquad \text{(a)}$$

2) $a=4$

$b_i=12, 9, 8, 4, 3, 1,\quad c_i=13, 11, 5,\quad x, y, z, u=10, 7, 6, 2$ (IV)

3) $a=5$

$b_i=12, 8, 7, 5, 4, 1,\quad c_i=13, 11, 3$

De återstående talen 10, 9, 6, 2 ger ej någon lösning till (a).

4) $a=8$

$b_i=12, 5, 4, 8, 7, 1\quad c_i=13, 11, -3$

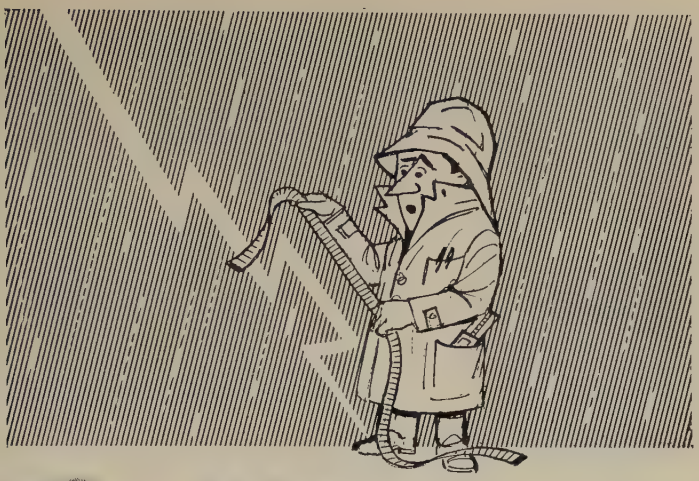
Talen 10, 9, 6, 2 ger ej någon lösning.

Om nu alla tal i resultaten (I)–(IV) ökas med 14, återkommer man till magiska kuber med de positiva talen 1 ... 27. Varje kub kan uppdelas i tre parallella kvadrater. De angivas här nedan.

I.	27	11	4	13	9	20	2	22	18	II.	26	10	6	13	9	20	3	23
	5	25	12	21	14	7	16	3	23		4	27	11	21	14	7	17	1
	10	6	26	8	19	15	24	17	1		12	5	25	8	19	15	22	18
III.	22	2	18	12	25	5	8	15	19	IV.	24	2	16	11	25	6	7	15
	11	27	4	7	14	21	24	1	17		10	27	5	9	14	19	23	1
	9	13	20	23	3	16	10	26	6		8	13	21	22	3	17	12	26

En spegel, parallell med någon av kubens ytor, ger fyra nya kuber.

r Ni rätta utrustningen för elektriska mätningar ?



AVO-instrument

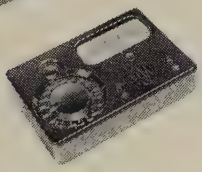
för att vara exakt

s Kr 285:—
edskapsväska
40:—

AVO MODELL HD är det rätta instrumentet för varje starkströmstekniker. Det mäter lik- och växelspänning, lik- och växelström samt resistans inom 18 områden. AVO HD har automatiskt verkande överbelastningsskydd och är av så robust konstruktion att det tål alla rimliga elektriska och mekaniska påfrestningar. AVO HD är alltid "körklar".

Begär prospekt med närmare uppgifter om AVO HD och övriga AVO-intrument.

OMETER MOD. 8,
00 Ω /V, 28 mät-
åden. Ett instrument
den anspråksfulle
eknikern. Kr. 425:—



AVO MULTIMINOR
MOD. 1, 10 000 Ω /V,
19 mätområden. Det rätta fickinstrumentet för varje servicemen.
Kr 95:—

AVO RÖRVOLTMETER
MOD. E med LF uteff. meter, 56 mätområden, fikso. 250 mV — 10 000 V, väskmodell.
Kr 860:—

AVO RÖRMÄTBRYGGA
MOD. V/3 mäter "konditionen" hos alla standardrör och upptar deras karakteristikor.
Kr 1250:—

SVENSKA RADIOAKTIEBOLAGET

Alströmergatan 14, Stockholm 12, Tel. 22 31 40

Filialer i Göteborg, Malmö, Norrköping, Sundsvall, Örebro

Insänd litteratur

John Wiley & Sons, Inc., New York/Chapman & Hall Ltd., London, 1959:

S. Kullback, *Information Theory and Statistics.* Pp. 395, $ 12.50.

B. Etkin, *Dynamics of Flight.* Pp. 519, $ 15.00.

U. Fano/L. Fano, *Basic Physics of Atoms and Molecules.* Pp. 414, $ 10.00.

D. C. White/H. H. Woodson, *Electromechanical Energy Conversion.* Pp. 646, $ 12.50.

L. D. Smullin/H. A. Haus (Editors), *Noise in Electric Devices.* Pp. 413, $ 12.00.

E. C. Dapples, *Basic Geology for Science and Engineering.* Pp. 609, $ 9.50.

R. R. Slaymaker, *Mechanical Design and Analysis.* Pp. 418, $ 9.50.

Semiconductor Abstracts (E. Paskell, Editor). Pp. 456, $ 12.00.

B. F. Howell, Jr, *Introduction to Geophysics.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1959. Pp. 399, 70s. net.

A. Pitchford, *Studies in Geometrical Optics.* Macdonald, London, 1959. Pp. 221, 32s. 6d. net.

E. N. da Andrade, *An Approach to Modern Physics.* Sec. Ed., Bell & Sons, London, 1959. Pp. 254, 27s. 6d. net.

J. Thomson/E. B. Callick, *Electron Physics and Technology.* The English Univ. Press, London, 1959. Pp. 527, 50s. net.

E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics.* Cambridge Univ. Press, 1959. Pp. 95, 13s. 6d. net.

The Design of Physical Research Laboratories. A Symposium, 27 Nov. 1957, The Institute of Physics. Chapman & Hall, London, 1959, Pp. 108.

Marie-Antoinette Tonnelat, *Les principes de la théorie électromagnetique et de la relativité.* Masson & Cie, Paris, 1959, 394 p., 5000 fr.

J. H. Weihnacht, *Prinzipien zur Lösung mathematischer Probleme.* Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1959, 116 S., DM 8,80.

C. Höfling, *Lehrbuch der Physik.* Oberstufe. Ausgabe B. Dritte Aufl., 1959, 500 S., DM 7,90. — Mittelstufe. Ausgabe A. Vierte Aufl., 1959, 456 S., DM 7.90. Dümmlers Verlag, Bonn. — Närmast föregående upplagor anmälda i Elementa *41,* 69, 1958.

H. von Stein, *Naturwissenschaft und Technik in der Kultur des Abendlandes.* Deutsches Verlagshaus Bong & Co., München, 1958, 226 S., DM 9,80.

Analytische Chemie. Bücher und Zeitschriften. Katalog 16, 1959. Verlag Chemie, Weinheim/Bergstrasse, 168 S.

C.-E. Fröberg, *Numerisk analys.* Lunds Studenters Intressebyrå, 1959, 160 s., kr. 16: —.

Håstad/Schwarz, *Tentamensproblem med lösningar.* För betyget B i matematik. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1957, 135 s., kr. 19: —.

S. Henrysson, *Elementär statistik.* Andra uppl., Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1959, 118 s., kr. 11: 75.

P. R. Hofstatter, *Social psykologi.* Övers. från tyskan av fil. lic. G. Dahlström. I serien »Scandinavian Univ. Books». Sv. Bokförl., Stockholm, 1959, 126 s., kr. 12: —.

Ch. Gewertz, *Växelströmslära.* Sv. Bokförl./Norstedts, Stockholm, 1959, 244 s., kr. 29: —.

G. Nilsson, *Geometri.* För den treåriga realskolan och enhetsskolans högstadium. Sv. Bokförl./Bonniers, Stockholm, 1959, 74 s., kr. 4: 20.

B. Bergman, *Om du hinner.* Träningsuppg. i matematik. Klass 6. AVCarlsons, Stockholm, 1959, 68 s., kr. 1: 95.

H. Flensburg/A. Svensson, Enhetsskolans matematik. Årskurs 7. Alternativkurs 1. AVCarlsons, Stockholm, 1959, 157 s., kr. 3: 90.

Lindståhls Boknyheter. Vetenskaplig och teknisk litteratur nr 33, 1959, 28 sid. Lindståhls Bokhandel, Odeng. 22, Stockholm.

Hur gammal är Jorden?

Av Ingvar Karlén, Fysiska Institutionen, Uppsala.

Ända tills för ett par hundra år sedan hade man ingen möjlighet att beräkna eller ens uppskatta jordens ålder, utan man fick hålla sig till det värde på ca 5000 år, som teologerna kunde utläsa ur Gamla Testamentet. Så småningom upptäckte man emellertid att jordklotet, och hela universum, »lever», dvs. utvecklas med tiden. Varje storhet, som lagbundet ändras med tiden, kan användas till en åldersbestämning, om man känner eller kan sluta sig till dess ursprungliga värde.

Den förste som med vetenskaplig metod uppskattade Jordens ålder var den engelske astronomen Halley (1656—1742), mest känd för den komet som uppkallats efter honom. Han utgick ifrån att havsvattnet fått sin salthalt genom att bäckar och floder löser upp salter från jordytan och för dem till haven. Då vattnet sedan avdunstar och fortsätter sitt kretslopp i naturen, stannar saltet kvar, varigenom salthalten i oceanerna sakta ökar. Genom att mäta salthalten i floderna kan man uppskatta den saltmängd som tillförs haven. Man beräknar att oceanernas salthalt årligen ökar med ca 10^{-8} % och därigenom nått upp till nuvarande 3 %. Havens ålder skulle alltså vara ca 300 miljoner år, under förutsättning att salttillförseln hela tiden varit konstant. Tillförseln av salt beror bl. a. på jordytans bergighet, och Jorden har genomgått flera perioder med bergveckningar och därimellan långa tidrymder då reliefen varit svagare, under vilka salttillförseln till haven bör ha varit långt mindre än nu, då Jorden befinner sig relativt nära en veckningstid. Om man tar hänsyn till detta kan oceanernas ålder uppskattas till några miljarder år.

I och med upptäckten av radioaktiviteten kring sekelskiftet öppnades helt nya möjligheter att göra mera noggranna åldersbestämningar. Det radioaktiva sönderfallet sker med en bestämd hastighet, enligt en känd lag, oberoende av de yttre fysikaliska förhållandena. För att bestämma t. ex. Jordens ålder fordras att man har ett naturligt radioaktivt element, dvs. ett element som har en halveringstid jämförbar med universums ålder, och att man kan mäta den nuvarande relativa mängden av detta element samt på något sätt kalkylera dess relativa mängd då Jorden bildades.

Innan vi går närmare in på frågan hur gammal Jorden är, måste vi klargöra vad vi avser med Jordens ålder och med denna sammanhängande begrepp.

Enligt Gamows modell av universums uppkomst (se nedan) har atomerna bildats genom sammanslutning av elementarpartiklar, samtidigt som universum började sin utveckling. Atomer nybildas ständigt genom radioaktivt sönderfall och termonukleära reaktioner i stjärnornas inre, men med *atomernas ålder* avses de först bildade atomkärnornas ålder. *Universums ålder* är den tid som förflutit sedan galaxerna och stjärnorna började bildas. Enligt Gamows teori blir

atomernas ålder=universums ålder.

Med *Jordens ålder* avses tiden räknad från jordskorpans bildande, dvs. då ytskiktets blandning med de inre delarna upphörde. Halleys metod ger egentligen inte Jordens ålder utan den tid som förflutit sedan vattencirkulationen genom atmosfären började.

Ifråga om mineral är det självklart vad som menas med deras ålder, då det gäller mineral som stelnat eller avsatts som sediment. Men en del mineral förändras genom uppvärmning eller tryckpåverkan, varvid processerna kan förlöpa under miljontals år. I dessa fall kan man inte tala om någon ålder i vanlig bemärkelse.

1. Atomernas ålder

Amerikanen Gamow har beskrivit atomernas uppkomst på följande sätt. För några miljarder år sedan var all materia i universum samlad på ett ställe under så extrema fysikaliska förhållanden, att inga atomer existerade utan endast fria elementarpartiklar och strålning. Av någon anledning började materien expandera, varvid temperaturen och tätheten snabbt sjönk och det under ett mycket kort tidsintervall uppkom gynnsamma betingelser för kärnreaktioner. Genom successiva neutroninfånganden och därefter β-sönderfall, $n \rightarrow p^+ + e^-$, byggdes allt tyngre atomkärnor upp. Sannolikheten för att en atomkärna skall bildas på detta sätt avtar snabbt med ökat antal ingående nukleoner, och det bildades alltså många fler lättare än tyngre kärnor, vilket framgår av diagrammet i fig. 1, som visar logaritmen för den relativa förekomsten H av olika atomer som funktion av masstalet A. Det är alltså ej förekomsten av grundämnena, utan summan av förekomsterna av isotoper med samma masstal, dvs. isobarer, som inprickats.

För små masstal minskar förekomsten mycket snabbt (obs. logskala) med växande masstal, medan den för masstal $>$ ca 100 är tämligen konstant. Detta beror, enl. Gamow, på att sannolikheten för neutroninfångning är större för de tyngre än för de lättare kärnorna. Att

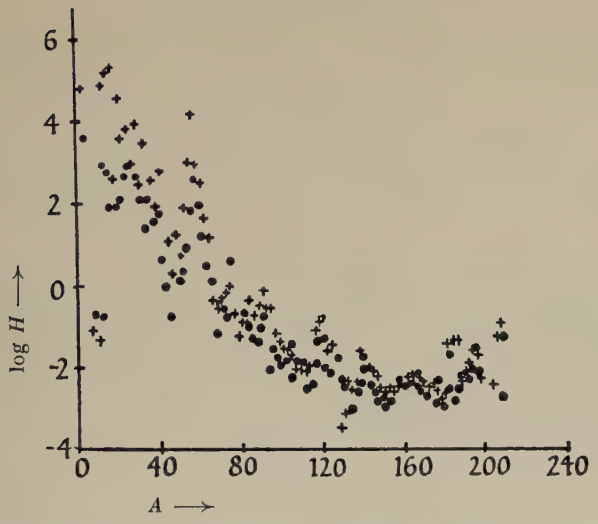


Fig. 1. Atomernas relativa förekomst H som funktion av masstalet A. — Udda A anges i figuren med en punkt, jämna med ett plus. — Diagrammet bygger på data från V. M. Goldschmidts och Harrison Browns mätningar av Jordens, meteoriternas och stjärnornas (solens) sammansättning.

man inte kan vänta sig någon slät »kurva», även om alla förekomsterna vore rätt uppmätta, förstås av att t. ex. tvärsnitten för neutroninfångning är små då antalet protoner eller neutroner är något av de s. k. »magiska» talen (2, 8, 20, 50 ...), varigenom förekomsterna där blir stora. Detta förklarar en del toppar i fig. 1.

Det finns två metoder för bestämning av atomernas ålder. De är baserade på de radioaktiva ämnena uran-torium resp. kalium.

1.1. Uran-torium

Wefelmeier antog att av de båda uranisotoperna U^{235} och U^{238} ursprungligen hade bildats ungefär lika stort antal atomer, N_0 (jfr fig. 1). Halveringstiden är för U^{235} avsevärt mindre än för U^{238}, $T_1 = 0{,}71 \cdot 10^9$ resp. $T_2 = 4{,}5 \cdot 10^9$ år, varigenom mängden U^{235} minskar fortare än U^{238}. Naturligt uran innehåller för närvarande endast 0,7 % U^{235}. Härav kan atomernas ålder beräknas på följande sätt.

Antar vi att antalet atomer U^{235} och U^{238} nu är N_1 och N_2 samt att det förflutit x år sedan »atomkokningen», erhålles enl. sönderfallslagen (med ln i betydelsen naturlig log)

$$N_1 = N_0 \cdot e^{-\ln 2 \cdot x/T_1} = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x/T_1} \text{ och } N_2 = N_0 \cdot e^{-\ln 2 \cdot x/T_2} = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x/T_2}$$

varav

$$\frac{N_1}{N_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(x/T_1 - x/T_2)}$$

Insättes ovan angivna värden på T_1 och T_2 samt $N_1/N_2 = 0{,}007$, erhålles

$$x \approx 5{,}8 \text{ miljarder år.}$$

Denna metod har numera utvecklats av Hoyle, Fowler, Burbridge samt Aten på följande sätt.

Ursprungligen bildades alla kärnor upp till atomvikterna 255—259. Alla kärnor med högre atomvikter sönderfaller sannolikt genom spontan fission. Många av de ursprungliga kärnorna hade neutronöverskott men stabiliserades mycket snabbt genom β-sönderfall. Transuranerna är radioaktiva, och genom »snabba» α- och β-sönderfall bildades U^{235}, U^{238} och Th^{232} (»snabba» i jämförelse med urans och toriums egna α-sönderfall). Den tidiga förekomsten av t. ex. torium måste tydligen beräknas som den ursprungliga mängden plus de stabiliserade mängderna $[H]$ av U^{236}, Pu^{240}, Pu^{244}, Cm^{248} och Cf^{252}. För att kunna göra beräkningar måste $[H]$ som funktion av atomvikten A vara känd. Aten har antagit flera olika slags enkla funktioner, t. ex. $[H]$ konstant för olika A eller att $[H]$ avtar med konstant faktor för jämn ökning av A.

För alla dessa funktioner har Aten, på liknande sätt som ovan, beräknat att atomernas ålder ligger inom intervallet

$$6{,}25 \pm 0{,}5 \text{ miljarder år.}$$

1.2. Kalium

Alla de kärnor som har udda antal protoner och neutroner (u, u-kärnor) och har en atomvikt större än 14 är radioaktiva. K^{40} har halveringstiden $T = 1{,}26 \cdot 10^9$ år, medan de övriga har avsevärt längre halveringstider; La^{138} har ca 10^{11} år och Lu^{176} $2{,}4 \cdot 10^{10}$ år.

I fig. 2 har relativa förekomsten för dessa kärnor uppritats.

Som synes av fig. 2 ligger alla elementen utom K^{40} på en slät kurva. Det är sannolikt att den tid (x år) som förflutit sedan K^{40} låg på kurvan är lika med atomernas ålder.

Antag att antalet K^{40}-atomer nu är N och att antalet var N_0 för x år sedan. Man har då enl. fig. 2 $N_0/N = 14{,}8$, och sönderfallslagen ger

$$N = N_0 \cdot e^{-\ln 2 \cdot x/T}$$

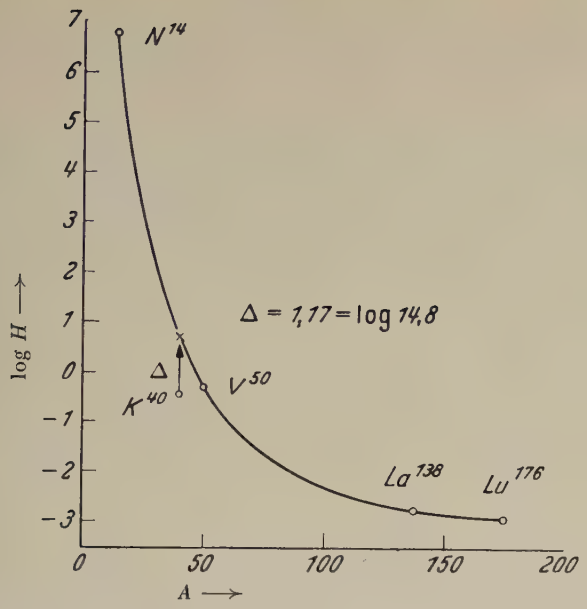


Fig. 2. Rel. förekomsten H för u, u-kärnor enligt H. Suess och H. C. Urey.

varav $$x = \frac{T \cdot \ln N_0/N}{\ln 2}$$ och $x \approx 4{,}9$ miljarder år.

Houtermans, som utvecklat denna metod, anger: $4{,}9 \pm 0{,}4$ miljarder år.

Dessa två skilda metoder 1.1. och 1.2. har alltså för atomernas ålder givit ett ganska samstämmigt värde på

5—6 miljarder år.

2. Jordens ålder

Den bästa metoden att bestämma Jordens ålder är den som bygger på urans och toriums sönderfall till olika blyisotoper. Med hjälp härav bestämmes först ett antal minerals ålder, och härur kan sedan jordskorpans ålder beräknas.

2.1. Urans och toriums sönderfall

Slutresultatet av deras sönderfallskedjor är:

(I)
$U^{238} \rightarrow Pb^{206} + 8\alpha + 6\beta + \text{energi}$; halveringstid $4{,}5 \cdot 10^9$ år
$U^{235} \rightarrow Pb^{207} + 7\alpha + 4\beta + \text{energi}$; » $0{,}71 \cdot 10^9$ år
$Th^{232} \rightarrow Pb^{208} + 6\alpha + 4\beta + \text{energi}$; » $14 \cdot 10^9$ år

Förutom de tre blyisotoper som förekommer härovan finns det en fjärde, Pb^{204}, som ej bildas vid något radioaktivt sönderfall och som alltså alltid funnits i konstant mängd. Blyisotopernas förekomster anges därför alltid i förhållande till Pb^{204}-mängden. Det ursprungliga bly som bildades vid »atomkokningen» bestod av alla fyra isotoperna, men sedan har genom urans och toriums radioaktiva sönderfall mängderna av de tre tyngre isotoperna ökat. Härur kan minerals ålder bestämmas (se nedan). Då blymineral kan betraktas som prover på isotopsammansättningen vid tiden för mineralbildningen, kan sedan jordskorpans ålder beräknas.

2.2. Minerals ålder

I början på 1800-talet lyckades geologerna genom att studera bergarternas fossilinnehåll fastställa en relativ tidsskala för deras bildande. De kunde alltså placera in bergarterna efter deras ålder på den kända skalan:

> Kvartär, tertiär, krita, jura, trias, perm,
> karbon, devon, silur, ordovicium, kambrium.

Man kunde emellertid icke säga hur gammal en bergart var eller när de olika perioderna började eller slutade. Kunde man alltså på något sätt erhålla några absoluta åldersbestämningar, så kunde skalan fastläggas i tiden, och därigenom skulle åldern på alla fossilförande bergarter kunna bestämmas. Tillämpning av radioaktivt sönderfall har numera möjliggjort datering av vissa mineral och bergarter.

Uranmineral innehåller alltid bly. Detta bly kan antingen bestå enbart av »radiobly», dvs. bly som bildats vid uranets sönderfall efter det att mineralet bildats, eller också ingick bly redan vid mineralbildningen och har sedan fått tillskott av radiobly. Dessa bägge fall kan åtskiljas genom att radiobly ej innehåller Pb^{204}, vilken isotop kan påvisas genom masspektroskopisk analys. I första fallet kan uranmineralets ålder beräknas direkt ur sönderfallslagen. I andra fallet kan man först subtrahera den mängd naturligt bly, som svarar mot mängden Pb^{204}, under förutsättning att man känner förhållandet mellan mängderna av de olika blyisotoperna på den plats och vid den tid då mineralet bildades. Detta förhållande kan ibland bestämmas ur ett blymineral i närheten, som geologiskt kan visas ha bildats samtidigt med uranmineralet. Därefter kan åldern beräknas ur sönderfallslagen. Den allvarligaste felkällan är nog, förutom ursprunglig halt av bly i mineralet, även kemisk förändring efter dess bildning (»lakning»).

Vanligen uppdelas metoden så, att man gör en bestämning enligt var och en av sönderfallskedjorna (I). Masspektroskopiskt får alltså

Pb^{206}- och U^{238}-mängderna osv., bestämmas, och man erhåller då två (tre om Th ingår) skilda åldersbestämningar på mineralet. Tyvärr får man sällan överensstämmande resultat. Orsaken härtill är bl. a. följande:

i Pb^{206}/U^{238}-metodens sönderfallskedja ingår som ett mellanled Rn^{222} med en halveringstid på 4 dagar. En del radon, som ju är en gas, kan då hinna diffundera ut ur mineralet.

i Pb^{207}/U^{235}-kedjan ingår i stället Rn^{219} med en halveringstid på endast 4 sek. Men genom att U^{235} finns i mycket mindre mängder än U^{238} minskas noggrannheten.

Pb^{208}/Th^{232} ger av okänd anledning ofta åldrar som avviker betydligt från de båda andra metoderna.

Man kan även använda andra ämnens sönderfall t. ex. kaliums (se 2. 5.), rubidiums och rheniums för åldersbestämningar:

$$Rb^{87} \rightarrow Sr^{87} + \beta; \quad \text{halveringstid } 6{,}0 \cdot 10^{10} \text{ år}$$
$$Re^{187} \rightarrow Os^{187} + \beta; \quad \text{» } \quad 4 \cdot 10^{12} \text{ år.}$$

Dessa senare metoder torde framdeles komma att få stor betydelse.

2. 3. Beräkning av Jordens ålder

Vi skall nu se hur man med hjälp av åldersbestämda mineral kan bestämma jordens ålder.

De äldsta mineral som daterats är från Syd-Rhodesia och är 2,7 miljarder år gamla. Detta är alltså en undre gräns för Jordens ålder.

I förenklad framställning kan t. ex. ett blyminerals bildning tänkas ha skett på följande sätt: Då jordklotet först bildades var det sannolikt i ett glödande tillstånd, och man kan anta att alla atomslag var väl blandade, åtminstone bör ett grundämnes isotopsammansättning varit densamma över hela jordklotet. Så småningom, för t_s år sedan, stelnade jordskorpan till bergarter, som innehöll bl. a. bly och uran i små mängder. Vid en viss tidpunkt, för t_m år sedan, bildades så ett blymineral genom att blyet i tämligen ren form utsköts ur urbergarterna tillsammans med det radiobly som bildats under tiden $t_s - t_m$. Isotoper är kemiskt lika och separeras därför föga vid malmbildningen. En blymalm med åldern t_m representerar alltså ett prov på isotopfördelningen för t_m år sedan.

Vid beräkningen av t_s inför vi för resp. blyisotopmängder beteckningarna x, y, z och a, b, c.

	204	206	207	208
Ursprungligt bly; ålder t_s	1	x	y	z
Blymineral med åldern t_m	1	a	b	c
Radiobly alstrat under tiden $t_s - t_m$	0	$a-x$	$b-y$	$c-z$

Antar vi vidare att U^{238} hade förekomsten u_0 för t_s år sedan och nu har förekomsten u, mätt i förhållande till Pb^{204} samt att λ_1 är sönderfallskonstanten, erhålles

$$u_0-(a-x)=u_0 \cdot e^{-\lambda_1(t_s-t_m)} \text{ och } u=u_0 \cdot e^{-\lambda_1 t_s}$$

Elimineras u_0, erhålles

$$a-x=u(e^{\lambda_1 t_s}-e^{\lambda_1 t_m}) \quad (1)$$

Med motsvarande beteckningar erhålles från andra och tredje sönderfallskedjorna i I

$$b-y=v(e^{\lambda_2 t_s}-e^{\lambda_2 t_m}) \quad (2)$$

$$c-z=w(e^{\lambda_3 t_s}-e^{\lambda_3 t_m}) \quad (3)$$

Ur (1) och (2) resp. (1) och (3) får man

(II) $$\frac{a-x}{b-y}=\frac{u}{v} \cdot \frac{e^{\lambda_1 t_s}-e^{\lambda_1 t_m}}{e^{\lambda_2 t_s}-e^{\lambda_2 t_m}}$$

(III) $$\frac{a-x}{c-z}=\frac{u}{w} \cdot \frac{e^{\lambda_1 t_s}-e^{\lambda_1 t_m}}{e^{\lambda_3 t_s}-e^{\lambda_3 t_m}}$$

Av dessa lämpar sig ekv. II bäst för bestämning av t_s; ekv. III ger osäkrare värden.

Av i ekv. II ingående storheter har u/v, dvs. det nu rådande förhållandet mellan U^{238} och U^{235}, värdet 137,8. Vidare känner man sönderfallskonstanterna och kan masspektometriskt bestämma a och b. Mineralets ålder kan man, åtminstone approximativt, bestämma för de allra flesta mineral (se 2.2.). Man skulle alltså kunna beräkna t_s, om x och y vore kända.

En sådan beräkning av t_s gjorde ryssen Gerling år 1942 genom att som x, y använda de lägsta värden som då uppmätts i något mineral (Ivigtut, Grönland), dvs. han beräknade åldern på detta mineral. Han fick resultatet 2900 miljoner år.

Gerlings beräkningar var under många år okända i västern. Under tiden arbetade bl. a. Arthur Holmes (Edinburgh) och F. Houtermans (Bern) med omfattande beräkningar. Holmes satte upp ekv. (II) för många mineral, eliminerade y och löste sedan ekvationen grafiskt.

Houtermans använde följande enkla grafiska lösningsmetod. För alla blymineral från samma geologiska period är högerledet i (II) konstant$=K$. Man har alltså

$$a-x=K(b-y)$$

I ett koordinatsystem med a som ordinata och b som abskissa erhålles en rät linje, en *isokron* (grekiska = samma tid). Alla isokroner går genom punkten (x, y), och x, y erhålles alltså som skärningspunk-

Tabell I. Daterade blymineral sammansättning.

Mineral	Referens	Pb^{206}	Pb^{207}	Pb^{208}	Pb^{204}	Ålder i miljoner år
)D, Stilla havet	Patterson 1953	18,93	15,72	37,80	1	0—1
'ertiära mineral	Cumming, Bate & Kulp 1955, m. fl.	18,98	15,85	39,22	1	30
enpaleozoiska mineral	Eberhardt 1955, Nier 1938 m. fl.	18,50	15,70	38,65	1	220
Mineral från Katanga	Geiss, Gretener m. fl.	18,17	15,84	38,36	1	620 (Cahen 1954)
Blyglans, Canada	Cumming 1955	15,98	15,62	36,00	1	≈1900 (Eckelmann & Kulp 1956)
hamvaisk blyglans, Syd-Rhodesia		14,08	14,98	34,12	1	2650 (Holmes 1954)
Blyglans, Sierra Leone	Gretener, Eberhardt	13,69	14,91	33,78	1	2930 (Wilson 1954 Gretener 1954)

ten för två godtyckliga isokroner. Insättes de så erhållna värdena i (II), kan t_s sedan beräknas.

För att få noggranna värden på x, y bör man använda två linjer som skär varandra under stor vinkel, dvs. isokroner för vitt skilda tidsåldrar. Yngsta möjliga bly erhålles ur oceanavlagringar (OD i tabell I). Till sådana avlagringar tillföres nämligen ständigt bly — genom luftens och vattnets inverkan — från alla delar av jorden. De innehåller därför ett genomsnitt av Jordens blysammansättning, och de övre lagrens ålder kan åtminstone i det här sammanhanget sättas lika med noll (även om de vore uppemot någon miljon år gamla).

I tabell I finns sammansättningen hos ett antal daterade blymineral. De angivna värdena är medelvärden av ett ganska stort antal bestämningar.

Holmes har genom omfattande räknearbeten erhållit som mest sannolika värden (index j betecknar jorden):

$$x_j = 9{,}49; \quad y_j = 10{,}32$$

$$t_s = 4500 \pm 100 \text{ miljoner år.}$$

Man måste dock komma ihåg att Holmes har gjort ett visst urval genom att han betecknat vissa mineral som onormala och utelämnat dessa.

Onormala blymineral med extremt hög förekomst av Pb^{206} och Pb^{207} kan t. ex. tänkas ha uppstått, om det bly som bildats i mycket stora

uranförekomster senare givit upphov till blymineral. Russel och Allan (1956) har, utan att göra så strängt urval som Holmes erhållit:

$$t_s = 4300 \pm 400 \text{ miljoner år.}$$

2. 4. Meteoriter

Meteoriterna tillhör med all säkerhet vårt solsystem, men hur de bildats är ännu inte klarlagt. Möjligen kan de ha bildats vid explosion av en planet, som för mycket länge sedan gick i en bana mellan Mars och Jupiter. Det finns huvudsakligen två typer av meteoriter: järn- och stenmeteoriter. Järnmeteoriterna innehåller så oerhört lite uran (ca en miljarddel), att dettas sönderfall ej märkbart har kunnat ändra blyets isotopsammansättning. Om man antar att bägge meteorittyperna bildats ur samma ursprungsmaterial, representerar järnmeteoriternas bly alltså ursprungligt bly för detta material. Ekv. (II) och (III) tillämpade på blymineral och stenmeteoriter ger $t_s = t_{\text{met}}$, som här blir tiden sedan ursprungsmaterialet delade upp sig i järn- och silikatdelar.

I Amerika har Patterson och Harrison Brown m. fl. utvecklat mycket exakta metoder för mätning av de små blymängderna i meteoriter. Den förre har lyckats mäta isotopsammansättningen vid en blyhalt av en på tre miljoner. Ytterst små föroreningar med bly från jordytan, som kan ha tillförts t. ex. vid den kemiska separeringen, utgör emellertid en allvarlig felrisk.

I tabell II anges sammansättningen av bly från några meteoriter. Pattersons beräkningar ger:

$$x_{\text{met}} = 9{,}50; \quad y_{\text{met}} = 10{,}36$$
$$t_{\text{met}} = 4550 \pm 70 \text{ miljoner år.}$$

Det ligger nu även nära till hands att beräkna Jordens ålder genom att betrakta blyet i järnmeteoriter som ursprungligt bly också för Jorden. Räkningarna blir då enkla, ty i ekv. (II) och (III) blir t_s enda obekant. Ekv. (II) blir t. ex. för OD i Tabell I (oceanavlagringar med $t_m \approx 0$)

$$\frac{18{,}93 - 9{,}50}{15{,}72 - 10{,}36} = 137{,}8 \cdot \frac{e^{\lambda_1 t_s} - 1}{e^{\lambda_2 t_s} - 1}; \qquad \lambda_1 = 1{,}537 \cdot 10^{-10} \quad \lambda_2 = 9{,}72 \cdot 10^{-10}$$

$$t_s = 4{,}5 \cdot 10^9 \text{ år.}$$

Bate och Kulp har 1955 genom att utnyttja en mängd isotopanalyser av mineral med olika åldrar och med järnmeteoritbly som ursprungligt bly erhållit

$$t_s = 4200 \text{ miljoner år.}$$

Tabell II. Isotopsammansättning av meteoritbly. (Patterson.)

	Bly i miljondelar	Pb^{206}	Pb^{207}	Pb^{208}	Pb^{204}	t_{met} i miljoner år
Järnmeteoriter:						
Henbury, Australien	5	9,55	10,38	29,54	1	Ursprungligt bly
Canyon Diablo, Arizona	18	9,46	10,34	29,44	1	
Medeltal		9,50	10,36	29,49	1	x, z, y, i ekv. (II) och (III)
Stenmeteoriter:						
Nuevo Laredo, Mexico	0,7	50,28	34,86	67,97	1	4580
Forest City, Iowa	0,4	19,27	15,95	39,05	1	4500
Modoc, Kansas	0,9	19,48	15,76	38,21	1	4480

2.5. A^{40}-K^{40}-metoden

Kaliums sönderfall kan användas för åldersbestämningar på såväl mineral, meteoriter och Jorden.

Kaliums sönderfall är dualt, dvs. det försiggår samtidigt efter två alternativa vägar:

$$K^{40} \nearrow Ca^{40} + \beta$$
$$K^{40} \searrow A^{40} \text{ elektroninfångning från K-skalet}$$

Halveringstid $1{,}3 \cdot 10^9$ år

Hur många procent som går de olika vägarna är ganska svårbestämbart, samtidigt som det är avgörande för åldersbestämningarna. Ahrens (1956) har beräknat att 10 % går vägen till A^{40}.

Wasserburg och Haydon (1955) har tillämpat denna metod på meteoriter. De mätte K^{40}- och A^{40}-mängderna i de inre delarna av större meteoriter, för att undvika påverkningen vid passagen genom jordatmosfären. Här är det fördelaktigt att finna små K^{40}-halter och därigenom små argonmängder, ty vid större argonmängder är det större chans att argon diffunderat bort. Det resultat på $4750 \cdot 10^6$ år som de beräknade med hjälp av ett värde på 8,5 % för K^{40}—A^{40} grenen har nu omräknats med hjälp av Ahrens värde (10 %) och ger då samma resultat som Patterson erhöll med blymetoden

4490—4620 miljoner år.

I jordskorpan är kalium ett ganska vanligt grundämne. Argon finns i atmosfären i nära 1 %, medan övriga ädelgaser endast finns i tusendels procent. Luftens argon består till största delen av A^{40}, och

om man antar att all denna bildats vid K^{40}-sönderfall kan atmosfärens ålder bestämmas. Shillibeer och Russel gjorde 1955 en uppskattning av hur stor del av jordskorpan som genom erosion och vulkanutbrott m. m. kunnat leverera sitt A^{40}-innehåll till atmosfären.

Härur uppskattade de atmosfärens ålder till

5300 miljoner år.

2. 6. Månens avstånd

Närmast som ett kuriosum kan nämnas att Månens avstånd från Jorden kan ge ett värde på Jordens ålder.

Tidvattenvågorna, som slår mot kontinenterna, bromsar Jordens rotation. Man beräknar att rotationstiden ökar med 10^{-5} sek./år. Enligt momentlagen på systemet Jorden—Månen är systemets rörelsemängdsmoment konstant. Jordens rörelsemängdsmoment minskar genom att rotationstiden ökar, varigenom man kan visa, att Månens avstånd från Jorden måste öka, och ökningen kan beräknas till 13 cm/år för närvarande. Det är troligt att Jorden och Månen utvecklats ur samma gasmoln och alltså bildats i närheten av varandra. Genom att beräkna när Jorden och Månen var i kontakt med varandra erhålles ett ungefärligt värde på Jordens ålder som himlakropp

ca 4 miljarder år.

3. Universums ålder

Universum expanderar. Galaxernas flykthastigheter kan bestämmas genom Dopplerförskjutningar i deras spektra, och ur dessa hastigheter och avstånden till galaxerna kan universums ålder beräknas. Tidigare fick man som resultat att universum endast var två miljarder år, alltså yngre än Jorden. Baade har emellertid nu visat, att de galaktiska avstånden är mycket större än man tidigare hade trott, och han har uppskattat universums ålder till

4—6 miljarder år.

En *minimiålder* för universum kan erhållas på följande sätt. J^{129} sönderfaller till Xe^{129} med en halveringstid på 17 miljoner år. J^{129} bör ha bildats i ungefär lika stor mängd som J^{127} (jfr fig. 1). Om det hade funnits kvar något J^{129} då meteoriternas ursprungsplanet stelnade, skulle man i meteoriterna kunna påvisa spår av Xe^{129}, men detta har ej lyckats. Härur kan man sluta, att universums ålder är minst 0,4 miljarder år äldre än meteoriterna.

Universums ålder $\geqq$ 4,9 miljarder år.

4. Sammanfattning

	Metod	Enligt	Resultat i milj. år
Jordens ålder	Pb	Holmes	4500 ± 100
	Pb	Russell, Allan	4300 ± 400
Atmosfärens ålder	A^{40}/K^{40}	Shillibeer, Russell	5300
Meteoriternas ålder	Pb	Patterson	4550 ± 70
	A^{40}/K^{40}	Wasserburg, Haydon	
	Sr^{87}/Rb^{87}	Schumacher	4700 ± 400
Månens ålder			ca 4000
Atomernas ålder	U—Th	Aten	6250 ± 500
	K^{40}	Houtermans	4900 ± 400
Universums ålder	Expansion	Baade	4000—6000
	Xe^{129}/J^{129}	Harrison Brown	≥ 4900

Referenser

A. H. W. Aten J:r, The calculation of the age of the elements. Physica XXIII, 1957.

Harrison Brown, The age of the solar system. Scientific American, april 1957.

H. Faul, Nuclear Geology. John Wiley and Sons, New York, 1954.

George Gamow, Universums skapelse. Bonniers, Stockholm, 1953.

Arthur Holmes, How old is the earth. Trans. Edin. Geol. Soc. Vol. XVI, 1956.

F. Houtermans, Radioaktivität und Alter der Erde. Die Naturwissenschaften Heft 6, 1957.

Harold Jeffreys, The Earth. Cambridge Univ. Press, 1952.

Frans E. Wickman, Om Jordens ålder och de geologiska tidsbestämningarna. Statens Naturvetenskapliga Forskningsråds Årsbok 1950/51.

Falska rötter — en logisk och metodisk fråga

Av lektor Sven Hilding, Stockholm

I samband med de skriftliga proven i matematik har på senare år de s. k. falska rötterna till ekvationer tilldragit sig ett visst intresse.

Med en falsk rot till en ekvation menas här (möjligen i en något vidare betydelse än brukligt) ett värde $x=x_1$, som ej satisfierar en viss, uppställd ekvation

t. ex. $x=-1$ i ekvationen $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x^2-1}$

eller $x=180°$ i » $\dfrac{3}{\sin 3x}=\dfrac{2}{\sin x}$

eller $x=0{,}33$ i » $3x=1$.

Naturligtvis kan man inte, om ett problem är formulerat: »Lös ekvationen $f(x)=0$» acceptera $x=x_1$ bland lösningarna, då $f(x_1)$ ej är definierat eller $f(x_1)\neq 0$.

Situationen är emellertid vanligen icke den utan följande: Ett visst problem P är formulerat. Dess svar kan förutsättas bli presenterat i approximativ form eller med ett exakt tal. För att finna lösningarna till P gör man en matematisk modell, som idealiserar de begrepp som finns i P och får då ett problem P^*. Därvid kan det hända, att vissa lösningar till P^* saknar relevans för P. De kan då givetvis ej accepteras som lösningar till P. Det kan också inträffa att man finner en approximativ lösning till P^*, som blir en lösning till P, just därför att problemet P är en approximation av problemet P^*. Lösningen skall då naturligtvis accepteras. En tredje variant är att P^* ersatts av två idealiserade problem P_1^* och P_2^* och att man vid behandlingen av dem får en lösning, som ej är lösning till P_1^* och ej heller till P. Det är då uppenbarligen fullt korrekt att förkasta en sådan lösning av det skälet att den ej uppfyller villkoren i P — och detta alldeles oavsett hur lösningen förhåller sig till P_1^*.

Logiskt ligger det ju till så, att om flera tillräckliga villkor formulerats för giltigheten av en viss sats, så räcker det att *ett* av dessa villkor är uppfyllt för att satsen skall vara sann.

Följande tillämpningar må tjäna som illustration.

Problem P: I en triangel skall ett par sidor förhålla sig som 3 : 2 och motstående vinklar som 3 : 1. Ange den mindre av dessa vinklar.

Problem P^*: Bestäm lösningarna till systemet

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3}{\sin 3x}=\dfrac{2}{\sin x}\\ 0<3x<180^\circ\end{array}\right\}$$

Sinusteoremet. Det är likgiltigt, om bråken anges såsom här eller inverterade.

P^* har blott *en* lösning, $x=\frac{1}{2}$ arccos (1/4), som också motsvarar en lösning till P. Det är rimligt att lösningen till problemet P anges med ett ungefärligt gradtal, och allmänt anses det också lämpligt att som lösning till P^* ange

$$x=37{,}76^\circ$$

i stället för något av de korrekta alternativen

$$x=\tfrac{1}{2}\arccos(1/4) \quad \text{eller} \quad x\approx 37{,}76^\circ$$

Motsvarande resonemang kan tillämpas i följande fall (riksbekant genom bedömningen av en uppgift i realexamen häromåret):

Problem P: Tre likadana stoppnålar upptar lagda i rad sträckan en decimeter. Hur lång är varje nål?

Problem P^*: Bestäm lösningarna till likheten $3x=1$.

P^* uppvisar lösningen $x=1/3$, som motsvarar en lösning 0,33 dm till P; uttrycket »1/3 dm» saknar mening.

Det finns i detta fall (liksom i det föregående) all anledning att godta lösningen till P^* under formen $x=0{,}33$ i stället för något av de korrekta alternativen

$$x=1/3 \quad \text{eller} \quad x\approx 0{,}33$$

ty P^* är ett hjälpproblem för P, och man söker lösningen till P.

Det tidigare nämnda triangelproblemet visar också upp andra aspekter. Antag att man som hjälpproblem i stället för P^* satt upp följande:

Problem P_1^*: Ange lösningarna till $\dfrac{3}{\sin 3x}-\dfrac{2}{\sin x}=0$

Problem P_2^*: Ange lösningarna till $\sin x \cdot \sin 3x \neq 0$

Det må påpekas att P_1^* är ej likvärdigt med sinusteoremet, utan en konsekvens av det, vilket vid en redovisning av lösningen kan anges med orden »Sinusteoremet ger:».

Genom kombination (ledvis multiplikation) erhålles

$$3\sin x-2\sin 3x=0$$

Den sistnämnda ekvationen uppvisar bl. a. lösningen $x=0$. Om man inser att denna lösning saknar intresse för P (dvs. ej motsvaras av någon lösning för P), kan den givetvis förkastas utan någon diskussion av hur den förhåller sig visavi P_1^*. Den är en s. k. falsk rot till P_1^*, men man söker lösningarna till P. (Exempel på andra falska rötter till P_1^*, som är lika ointressanta att ta upp till diskussion, så snart man insett att de ej ger någon lösning till P, är $x=90°$ eller $x=900°$).

Vänder man sig från den logiska till den metodiska sidan av saken, kommer man in på frågan om vilken utförlighet som rimligen kan krävas vid redovisningen av en härledning av lösningar till P. Man kan då observera, att rådande praxis vid ekvationslösning uppvisar *logiska* ofullständigheter. Sålunda resonerar man t. ex. vid bestämning av roten till ekvationen $2x+3=7$:

$$2x+3=7 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2; \quad \text{Svar: } x=2,$$

medan resonemanget borde kompletteras med:

$$x=2 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow 2x+3=7; \quad \text{Svar: } x=2.$$

Underförstått är naturligtvis:

$$2x+3=7 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$$

och vanskligheterna visar sig också, då räkneoperationerna ej blir entydigt omvändbara, såsom:

$$\sqrt{x}+1=0 \Rightarrow (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

Ur metodisk synpunkt kan det dock anses försvarligt att vid redovisningen av lösningen till ekvationen $2x+3=7$ underförstå »operationerna är entydigt omvändbara». Likaså förefaller det rimligt att vid bestämningen av (de reella) rötterna till ekvationen $x(x^2+1)=x^2+1$ utan diskussion acceptera divisionen med (x^2+1), ty man underförstår »då x är reellt, är $x^2+1>0$».

På liknande sätt torde det vara lämpligt att vid formuleringen »Sinusteoremet ger $\frac{\sin 3x}{3}=\frac{\sin x}{2}$» i fortsättningen acceptera division med $\sin x$ och därvid underförstå »i sinusteoremet är $\sin x>0$». Att efter en hänvisning till sinusteoremet börja diskutera den därmed oförenliga möjligheten $\sin x=0$ förefaller vara ett sämre alternativ. Att det alls uppträder någon »falsk rot» till en ekvation $f(x)=0$ beror många gånger på att vid lösningen underförståtts ett villkor $g(x)\neq 0$, varefter ekvationen $f(x)g(x)=0$ behandlats.

Motsvarande förhållanden råder vid geometriska, konvergenta serier med kvoten k. Har man en gång utnyttjat formeln för en oändlig geometrisk series summa, så är därmed förutsatt $0<|k|<1$, och det förefaller dels direkt olämpligt att börja diskutera möjligheterna $k=0$ eller $k=1$, dels fullt rimligt att acceptera divisionen med k eller $(k-1)$ utan ytterligare kommentarer. Under alla förhållanden är det logiskt oantastligt att avfärda möjligheterna $k=0$ eller $k=1$ under hänvisning till att serien eller summan då ej existerar, alldeles oavsett om några uppställda ekvationer satisfieras av dessa värden eller ej.

Alla framsteg i matematiskt tänkande bygger på att tankeoperationerna förkortas. Man kan inte varje gång man utnyttjar resultatet $3\cdot 4=12$ fordra en motivering »ty $4+4+4=12$». Att avgöra var gränsen går mellan sådana motiveringar som bör medtagas och sådana som kan underförstås måste bli en omdömesfråga, såsom vid all språklig kommunikation människor emellan. För matematikläraren gäller det å ena sidan att uppöva elevernas logiska tänkande och deras förmåga att föra korrekta resonemang — å andra sidan att inte hämma utvecklingen av deras konstruktiva, skapande begåvning genom överdrivet pedanteri.

Iakttagelser, språk och förklaringar i fysiken

Av lektor Birger Grundström, Djursholm

Varför rör sig en kropp, som inte påverkas av krafter, i en rät linje med konstant hastighet, och varför är gravitationskraften omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet? Varför rör sig ingenting snabbare än ljuset och varför är alla elektroner identiska? Därför att världen, sådan vi känner den, blir begriplig om vi antar att det förhåller sig så. En vetenskaplig teori är som ett mönster i vilket våra experiment och iakttagelser kan inpassas. Ibland frestas man att säga, att hela historien med elementarpartiklarna är den, att de utrustas med just de egenskaper, som är nödvändiga för att vi skall kunna förklara de fenomen, som vi iakttagit. Prof. Fermi skriver: »Man har föreslagit existensen av neutrinon som ett alternativ till att behöva uppge energiprincipen vid betasönderfallet. Neutrinon är neutral, dess massa är noll eller extremt liten, dess spin antages vara 1/2, dess magnetiska moment antingen noll eller mycket litet ...» Föreställningen om neutrinons existens är i likhet med antagandena om tillvaron av andra elementarpartiklar framförd med tanke på att vissa atomfysikaliska experiment skall kunna förklaras. Härigenom påverkas naturligtvis inte realiteten hos föremålet för de atomfysikaliska studierna. Elementarpartiklarna är inga logiska fiktioner eller matematiska hypoteser enbart avsedda som utgångspunkter för logiska deduktioner, men å andra sidan består vår kunskap om materien inte endast av en beskrivning av experimentella resultat.

Genom en av N. R. Hanson, professor i filosofi vid Indiana University, nyligen utgiven bok,[1] »Patterns of Discovery», aktualiseras några av de problem, som en lärare eller läroboksförfattare ställes inför, då han vill ge en logiskt sammanhängande framställning av fysikens grunder. Boken ger nya aspekter på kända pedagogiska problem och stimulerar härigenom läsaren till egna funderingar. Prof. Hansons avsikt är inte att tyda kända fenomen med hjälp av gängse antagna teorier. Han undersöker i stället längs vilka vägar och »svagt upplysta gränder» fysikern går från de experimentella resultaten till den teori, som skall förklara experimenten. Den logik eller, enligt flera filosofer, bristande logik, som därvid användes, utsättes för en när-

[1] Norwood Russell Hanson, *Patterns of Discovery*. An Inquiry into the Conceptual Foundations of Science. Cambridge University Press. 1958. Pp. 241, 30 s. net.

gången granskning, detta gäller i synnerhet osäkerhetsrelationen och korrespondensprincipen.

Boken är indelad i följande huvudavsnitt: observationer, fakta, kausalitet, teorier och partiklarnas fysik. Därefter följer två appendices, det ena handlande om Heisenbergs nya ekvation och det andra innehållande en härledning av Schrödingers vågekvation. Som avslutning ges en mycket utförlig textkommentar.

Iakttagelser

Får två personer som betraktar samma föremål också samma synintryck, ifall den fysikaliskt-kemiska delen av förloppet är lika i båda fallen? Antag att Tycho Brahe och Johannes Kepler betraktade samma solnedgång. Identiskt lika fotoner emitterades från solen och passerade genom sol- och jordatmosfärerna. Om de båda observatörerna hade normala ögon, gick fotonerna genom de olika optiska delarna av ögat på samma sätt och alstrade slutligen lika bilder på näthinnorna. Såtillvida såg de alltså samma sak. Men denna fysikaliskt beskrivbara procedur är endast en del av det totala synintrycket. Ögongloben är lika blind som kameran, det är människan som ser. Såg nu Brahe att solen rörde sig kring jorden, och såg Kepler en stillastående sol och en roterande jord, eller skall denna del av observationen inte anses höra till synintrycket utan endast utgöra en tolkningsfråga?

Det förefaller vara omöjligt att ge ett definitivt och detaljerat svar på denna fråga. De flesta skulle kanske mer eller mindre spontant ansluta sig till det senare alternativet samt dessutom tillägga, att deras eget intryck av aftonsolen är att solen rör sig ned mot horisonten. Samma svar skulle förmodligen ges av de flesta astronomer. Men bokens förf. har en annan uppfattning. Han anser det vara ett fundamentalt misstag att tro att Brahe och Kepler såg samma sak, och han anger flera skäl för att synintrycket kan vara olika hos skilda observatörer. Ett av de mer övertygande är det intryck man får av den i fig. 1 perspektiviskt ritade kuben. Om vi bortser från dem, som här endast ser ett virrvarr av varandra skärande linjer, kan två fall uppstå: antingen ser man kuben snett uppifrån så att kubens övre yta inte skymmes av sidoytorna, eller också ser man kuben snett underifrån, då följaktligen dess undre yta är åtkomlig för direkt insyn. Om vi nu i lugn och ro betraktar teckningen, ser vi den än på det ena och än det andra sättet. Övergångarna mellan de båda synsätten sker plötsligt och oförmedlat utan vårt eget åtgörande och har ingenting med några som helst tolkningsförsök att skaffa. Vi endast ser kuben på endera sättet. Om vi t. o. m. strävade efter att försöka se

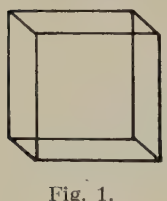


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

kuben på ett bestämt sätt, kanske vi ändå såge den på det andra sättet. Att tolka, interpretera, är att tänka och det tar tid, men övergången mellan de båda synintrycken går så snabbt, att vi inte hinner tänka.

Solen är inte perspektivisk, den uppfattas som en lysande skiva och kan därför inte ge upphov till skilda synintryck på samma sätt som kuben. De omvändbara kubiska perspektiven är exempel på hur man kan se olika ting i samma konfiguration, utan att denna skillnad beror på olikhet i visuellt intryck eller på efterföljande interpretation.

I fig. 2, 3 och 4 vill prof. Hanson klargöra en detalj i synintrycket, som han kallar seendets organisation. Vad föreställer fig. 2, är det en fågel eller en antilop? Det beror på i vilket sammanhang man ser den. Identiskt samma bild återfinnes i nedre högra hörnet av bilden av fåglarna i fig. 3 och bilden av antiloperna i fig. 4. I fig. 3 är vi benägna att anse den vara en fågel och i fig. 4 en antilop. Figur 2 utgör tydligen inte bilden av något bestämt förrän den ses i ett visst sammanhang, då först ser vi den. Vi kunde också ha åstadkommit sammanhanget, organisationen, utan att anlita bilderna 3 och 4 genom att i stället en-

dast peka på och med ord förklara detaljerna i fig. 2. Härigenom blir sammanhanget en del av illustrationen.

Vårt synintryck påverkas på ett avgörande sätt, om vi på förhand vet något om det vi betraktar. Ett barn och en lekman kan se, men de är ändock blinda för det som en fysiker eller biolog ser. Fysikern ser ett röntgenrör, då barnet endast ser en konstig elektrisk lampa. Ett stort antal människor, barn såväl som vuxna, kan se kuben i fig. 1 på båda sätten, men en person, som är helt okunnig om en lådas konstruktion, ser ingenting. Enl. prof. Hanson förhåller sig Brahe och Kepler till solen som du och jag till fig. 2. Du ser en fågel, jag en antilop — Brahe ser en rörlig och Kepler en fast sol. Om man säger, att Brahe och Kepler, Hooke och Newton, Priestly och Lavoisier, Soddy och Einstein eller de Broglie och Born gjorde samma observationer, men använde dem olika, har man gjort en otillåten förenkling. Om observationerna inte i något hänseende vore olika, skulle de inte ha använts på olika sätt.

Fysikaliska observationer består inte av en villervalla av »flashes, sounds and bumbs» utan av en på förhand anordnad iakttagelse av utvalda fenomen. Någon sällsynt gång gör forskaren en iakttagelse, som förefaller vara så ny, att han glömmer allt vad han vet och avvaktar händelseförloppet som ett barn. Han får då till en början nöja sig med ett enkelt uppräknande av de nya sensationerna, för att sedan se dem i relation till allt vad han vet om övriga omständigheter vid försöket. Men om forskaren skulle reagera på samma sätt i ordinära laboratoriesituationer, skulle vi anse att han inte såg någonting i sin omgivning.

Emellertid torde väl ingen situation vara så absolut ny, att man inte på förhand vet något om den, och vetenskapliga framsteg bygger alltid i något avseende på det man förut känner. Det är närmast mot denna bakgrund man kan anse att Hansons åsikter om sinnesintrycken kan få praktisk betydelse. Olika forskare får utan tvivel olika intryck av ett och samma objekt. Utsortering av differenser angående data och observationer består ej endast i att peka ut olikheter hos de observerade objekten utan i en mångsidig omvärdering av sinnesintrycken, vilket ofta är förenat med stora risker. Vi påverkas av förutfattade meningar, och även det språkliga uttrycket för vår uppfattning spelar en roll. Hanson hävdar med bestämdhet, att det finns ett språkligt element i vår uppfattning av sinnesintrycken, ty det är med språkets hjälp som observationerna blir relevanta för vår kunskap.

Språk

Språket är vårt främsta instrument för att logiskt beskriva de resultat vi anser oss ha uppnått. Meningarna: solen är gul, gräset är grönt,

uttrycker en egenskap hos solen och gräset. Men på ryska och arabiska kan man också säga att solen gular och gräset grönar, vilket måste fattas som en beskrivning på en ständigt pågående aktivitet hos solen och gräset, ej att förväxla med uttrycken solen lyser och gräset grönskar, vilket syftar på en aktivitet av annan art. Ännu tydligare framträder denna egendomliga aktivitet, om man säger att solen rundar eller rummet rektangulerar. Man måste här tänka sig kroppar som strävar efter att bibehålla sin form under ständig kamp mot inre och yttre krafter. Ett sådant uttryckssätt förutsätter att araben faktiskt ser hur solen rundar sig! Om man slutligen uttrycker sig i adverbialform, solen lyser gulaktigt, har man inte sagt att solen är gul.

Författarens uppfattning om språkets makt över tanken är något skiftande. Han säger först att om man inte kan göra en distinktion med språkets hjälp, kan den inte göras på ett begripligt sätt. Men han modifierar sedan sin inställning till frågan, då han längre fram säger, att det måste vara mycket svårt att formulera ett begrepp X med hjälp av ett språk, som saknar uttryck för X. I denna situation befann sig dock Galilei, då han ställde upp begreppet konstant acceleration. Han gjorde det på geometrisk väg utan hjälp av den matematiska symbolen för derivatan, vilken ju först några tiotal år senare formulerades av Newton. Alltså, tillägger förf., behöver det inte vara omöjligt att tänka på en storhet X utan att ha ett språkligt uttryck för X. Han kunde ha tillagt att redan antikens fysiker och matematiker kunde reda sig utan derivatan i sådana situationer, då vi anser oss behöva den, t. ex. då Demokritos härledde formeln $V = B \cdot h/3$ för konens volym.

Språkets betydelse som uttrycksmedel för våra tankar kan överdrivas. Förf:s beskrivning på den elementära partikelfysikens grundtankar är ett gott exempel härpå. Han väljer här det vågmekaniska betraktelsesättet, vilket ju är den lättframkomligaste vägen, ty som han själv säger, att med ord försöka åstadkomma en begreppsmässig framställning byggd på matrix-mekaniken skulle vara »a formidable business». Kant har sagt, att de som filosoferar på latin endast har två ord till sitt förfogande i ett visst, här icke närmare angivet sammanhang, medan vi, dvs. tyskarna, har tre. Alltså ger oss tyskan ett begrepp mera än latinet! Som motsats härtill kan anföras, att det finns personer som anser, att Kant är lättare att begripa i engelsk översättning än på originalspråket! Tegnér sade, att det dunkelt sagda är det dunkelt tänkta, och i det av Tegnér angivna sammanhanget var detta uttalande måhända berättigat. Naturvetenskapliga tankegångar kan dock inte ensidigt göras till språkfrågor. Om något blir dunkelt sagt, kan det bero på att språket i detta tillfälle inte är användbart eller i varje fall inte ensamt förmår klara situationen utan

att andra hjälpmedel också måste anlitas. Matematiska symboler eller tecknade principskisser kan givetvis inte helt ersätta språket, men de kan inbespara långa och klumpiga meningar.

Prof. Hanson undersöker det logiska innehållet i några av fysikens lagar, bl. a. Newtons andra lag, $F = m \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$. Denna sats har fysikerna använt på mångahanda sätt, och Hanson anger några fall. Ekvationen kan uppfattas som 1) en definition av kraftbegreppet, 2) ett fysikaliskt axiom, 3) en empirisk generalisering och 4) en räkneregel. Om lagen uppfattas som en definitionsekvation, undandrager den sig givetvis all experimentell bekräftelse. Med Atwoods fallmaskin och liknande apparater kan man empiriskt visa, att lagen kan tolkas som ett sammanfattande resultat av ett stort antal experiment och iakttagelser. Om man uppfattar lagen på detta sätt, måste man i princip acceptera att vittnesbörd *mot* lagens riktighet också är tänkbara. Om ingenting skulle kunna visa att ett påstående är falskt, skulle heller ingenting kunna visa att det är sant. Att uppfatta lagen som ett axiom innebär att lagen a priori anses vara den bästa utgångspunkten för alla teorier om kroppars rörelser. I det sista av de fyra ovan angivna fallen uppfattar man lagen som en praktisk räkneregel, som varken är sann eller falsk, men med vars hjälp man kan utföra beräkningar angående krafter, massor, accelerationer, tider mm.

Om den ena vikten på Atwoods fallmaskin väger 50 gram och den andra 48 gram, säger lagen att $(50-48)g=(50+48)a$, varur erhålles accelerationen $a=20$ cm/s², om g antages vara 980 cm/s². En författare skriver: »Sedan vi genomfört ovanstående experiment och därvid funnit accelerationsvärdet 20 cm/s², som lagen föreskriver, har vi då bevisat lagens riktighet? Frågan är absurd, ty lagen är en definition och går inte att bevisa. Atwoods fallmaskin är huvudsakligen en apparat för bestämning av g genom att man mäter a, och inte en apparat för verifikation av Newtons lag.» — George Atwood byggde ursprungligen sin fallmaskin för att på empirisk väg genom noggranna mätningar försöka vederlägga dem, t. ex. Bernoulli och Leibniz, som tvivlade på lagens riktighet. — Sedan man genom en mängd försök med olika apparater funnit att lagen alltid stämmer, har man börjat tro, att om lagen inte stämde, skulle vår värld bli oförklarlig. Maskiner, tidvatten, navigation, allt på vår jord skulle framstå som ett obegripligt kaos. Även Atwood ger uttryck för en dylik axiomatisk inställning, då han deklarerar, att det är omöjligt att betvivla sanningen hos de Newtonska lagarna. — Det som fysikerna kallar Newtons andra lag består tydligen av allt det, som kan betraktas från ovan angivna synpunkter. Filosofen Hanson finner situationen vara något förvirrad men medger, att det är svårt att logiskt komma till rätta med pro-

blemet, och häri instämmer säkert många fysiker. — En utredning av det begreppsmässiga innehållet i en fysikalisk lag är ett utmärkt pedagogiskt hjälpmedel i vår strävan att utveckla gymnasieelevernas allmänbildning.

Förklaringar

Fysikaliska förklaringar består ofta däri att det som skall förklaras återföres på något annat, som i sin tur måste förklaras. Koksaltkristallens kubiska struktur förklaras sålunda inte genom att man tilldelar kristallens elementarceller en kubisk form, man endast uppskjuter förklaringen. Allmänt uttryckt: man kan inte förklara helheten av en viss slags egenskap genom att referera till någon enstaka medlem av samma egenskapsklass. Man kan inte förklara varför en kropp är röd genom att säga att alla röda kroppar består av röda partiklar. Det som skall förklaras, får ej på detta sätt självt ingå i förklaringen.

Antagandet av neutrinons egenskaper är ett typiskt exempel på hur observation och teori, fysik och matematik samarbetar för att åstadkomma en förklaring. Studiet av materien har framtvingat eller avslöjat egenskaper hos elementarpartiklarna, som i stor utsträckning inte är åskådliga utan endast matematiskt formulerbara. Det har nämligen visat sig, att om man tilldelar elementarpartiklarna avbildbara, modellmässiga egenskaper har man redan förbrukat sina möjligheter att tyda de egenskaper hos ordinära kroppar, vilka vi uppfattar som åskådliga och påtagliga. »De verkligt fruktbärande idéerna i fysiken är av matematisk natur» (Einstein) och »Vi har nått åskådlighetens gräns; föreställningen om en elektron, som kretsar runt atomkärnan, kan inte fattas bokstavligt» (Heisenberg).

Det är ett märkligt faktum, att en av Demokritos' föregångare, den joniske filosofen Anaximander, undgick ovan antydda svårighet, då han i sin världsförklaring lärde, att allt var uppbyggt av ett enda urämne, som i sig självt var obegränsat och egenskapslöst. Intet av de kända ämnena, luft, vatten osv. tilläts dominera över de andra. Försokraterna av den milesiska skolan, Thales, Anaximander och Anaximenes, vilka i särskilt hög grad kan anses vara föregångare till Demokritos och därför lämpligen borde kallas fördemokriterna, hyste alla den uppfattningen, att allt var uppbyggt av ett enda urämne. Denna geniala tanke gick i stort sett förlorad i den efterföljande antika filosofien; ingen av de stora filosoferna förde tanken om ett absolut enhetligt urämne vidare, och några demokritéer, dvs. lärjungar till Demokritos, uppträdde inte, så vitt man vet. Anaximander gick längst i fråga om abstraktion. Demokritos atomlära utgör sålunda ett tillbakasteg, eftersom Demokritos utrustade sina atomer med allehanda egenskaper beträffande form och storlek.

Heisenberg har nu uppställt en ny ekvation, som är avsedd att vara generellt giltig för all slags materia. Ekvationerna uppges — i likhet med Anaximanders urämne — icke bygga på enskilda partiklars individuella egenskaper, men skall ändock vara i stånd att redogöra för hela det spektrum av elmentarpartiklar, som vi nu känner till. Heisenberg uppger själv, att han inspirerats till sitt arbete med ekvationen av Anaximanders tankar. Måhända kommer Anaximander härigenom att bli lika aktuell och känd för nutidens människor som Demokritos blivit under de sista decennierna.

Det sista avsnittet av boken handlar om klassisk och modern partikelteori. I den klassiska teorien anses det som bekant vara möjligt att ange en partikels samtidiga läges- och hastighetskoordinater med vilken som helst grad av noggrannhet, medan den moderna teorien säger, att detta endast är möjligt i den utsträckning, som osäkerhetsrelationen föreskriver. Denna relation är en oundviklig följd av kvantmekanikens partikeluppfattning. Man kan sålunda inte acceptera en kvantmekanisk grundsyn och samtidigt hoppas på att man en vacker dag skall kunna övervinna de lokaliseringssvårigheter, som osäkerhetsrelationen beskriver. Den klassiska och moderna partikeluppfattningen representerar två från varandra principiellt skilda betraktelsesätt. Trots detta anses den klassiska uppfattningen av läge och hastighet kunna uppfattas som ett gränsfall av den moderna. Hur är detta möjligt, frågar förf. Ett vågpaket kan inte dra sig samman så fullständigt, att det når fram till den klassiska abstraktionen, den punktformiga massan. Grundläggande lagar i den klassiska partikelmekaniken kan inte formuleras med hjälp av den moderna. Resultatet blir, att partikeln måste betraktas på endera av de båda sätten.

Liknande tankegångar möter man i korrespondensprincipen. Den klassiska Bohr-Rutherfordska atommodellen och den kvantmekaniska representerar återigen två artskilda inställningar, men i gränsen för höga kvanttal ger båda metoderna samma resultat. Matematiskt sett finns det ingenting att invända, men de logiska svårigheterna kvarstår. Dels varnas vi för att den nya fysiken är logiskt oförenlig med den gamla och att vi inte får ställa några gammaldags fordringar på den nya fysiken beträffande åskådlighet, dels hävdas det, att den nya innehåller den gamla som ett gränsfall. Det är dessa motsättningar som filosofen finner vara logiskt oförenliga. Den klassiska partikelteorien kan enligt Hanson inte uppfattas som ett gränsfall av den moderna, även om den matematiska formalismen stämmer överens. Korrespondensprincipen innebär, att atomen, då kvanttalet är högt, kan betraktas på ettdera av två sätt: som en liten makroskopisk kropp eller som en stor kvantpartikel.

Det är med ett särskilt intresse man läser författare, som är fysiker

med filosofisk anknytning som exempelvis Weizsäcker eller filosofer med fysikalisk orientering som Reichenbach eller Hanson. Boken kan till en del uppfattas som ett symptom på en viss oro inför det vanskliga läge, vari den teoretiska fysiken befinner sig. Boken ger en mycket god behållning åt dem, som i fysiken inte endast ser en nyttig och användbar kunskap utan också intresserar sig för ämnets spekulativa och kunskapsteoretiska sidor. Ur pedagogisk synpunkt är den också av stort värde för lärare, som vill försöka ge sina elever en vägledning på den gungfly av begrepp och föreställningar, som fysiken även på skolstadiet trots allt utgör.

Framställning av Na_3MnO_4 som lektionsförsök

Av läroverksadj. Stig Ossian Ericson och förste assistent Stig Holmquist, Uppsala

Strax efter krigets slut publicerades i Tyskland en uppsats om hur man lätt framställer en förening av 5-värdig mangan (Hermann Lux, Z. Naturforsch. 1,281, 1946). Föreningens blå färg är lika vacker som permanganatets violetta och manganatets gröna. Föreningens existensbetingelser är ett utmärkt underlag för jämviktsdiskussion — föreningen har alltså både estetiska och pedagogiska förtjänster.

2,5 g finpulvriserat kaliumpermanganat och 3,5 g finpulvriserat natriumsulfit, $Na_2SO_3(H_2O)_7$, omröres noga i 50 ml iskall konc. natronlut (2:5). Temperaturen får inte stiga över 0° (kylning i isvatten). Efter ca 10 minuter är försöket avslutat, och himmelsblå kristaller Na_3MnO_4 kan samlas upp med hjälp av vattensug. De tvättas med kall konc. natronlut. I kristallkakan bildas gröna manganatfläckar, då saltet faller sönder. I kylskåp kan det förvaras i natronlut flera dygn, skenbart rent.

Ett intressant försök är den stegvisa reduktionen av permanganatjonen. I en erlenmeyerkolv har man i iskall konc. natronlut en knivsudd finpulvriserat kaliumpermanganat och litet natriumperborat. Då lösningen omsvänges under kylning, går den violetta färgen över i djupgrönt, men verkar bli violett igen, innan den plötsligt blir himmelsblå. Nästa steg är en oaptitlig gröngul färg, och slutsteget är gulbrunt. Reaktionshastigheten stiger med temperaturen: vid 10° är det blå stadiet beständigt i ca 10 sekunder.

Författaren ger följande reaktionsformel som grund för jämviktsdiskussionen:

$$Na_2\overset{+6}{Mn}O_4 + \overset{+4}{Mn}O_2 + 4\,NaOH \rightleftharpoons 2\,Na_3\overset{+5}{Mn}O_4 + 2\,H_2O$$

Det blåa saltet är som väntat isomorft med fosfat, arsenat och vanadat.

Aktuellt

Västsvenska föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning

anordnade lördagen den 11 april 1959 en pedagogdag i Göteborg för lärare i matematik, fysik och kemi. Över hundratalet medlemmar hade infunnit sig på Vasa h. a. läroverk, när ingenjör Stig Lindholm inledde pedagogdagen med att visa en rad instruktiva försök i anslutning till gymnasiekursen i atomfysik. Ett besök gjordes därpå hos Koppartrans oljeaktiebolag vid Skarvik, där oljeraffinaderiet och laboratoriet demonstrerades.

Efter lunchpaus samlades medlemmarna på Odd Fellow Orden. Professor Gustav Hössjer höll föredrag över ämnet »Gymnasieutbildningen i matematik ur den högre tekniska utbildningens synpunkt». Prof. Hössjer, som huvudsakligen uppehöll sig vid den matematiska grenens kurs, ansåg att man i framtiden torde vara nödsakad att väsentligt utöka kunskapsstoffet, främst i differential- och integralkalkyl. Å andra sidan borde man kunna minska kraven på stringens i framställningen. Det borde också vara möjligt att underkasta de humanistiska vetenskaperna en granskning och undersöka om inte tid kunde vinnas för matematiken på så sätt, att mindre värdefulla partier utmönstrades ur vissa humanistiska skolämnen. Med hänsyn till de svagare eleverna tvingas matematikläraren ofta att läsa en minimikurs. Prof. Hössjer ansåg att läraren gjorde samhället större tjänst om han i högre grad än vad nu i allmänhet är fallet ägnade sig åt de duktiga eleverna. Kuggningsprocenten behövde därför inte stiga, om samtidigt latituden mellan B? och B ökades.

I den efterföljande diskussionen yttrade sig bl. a. prof. Harald Bergström och rektor Arne Pleijel.

Rektorn vid Pedagogisk Seminar i Oslo Kay Piene kåserade slutligen över ämnet »En skandinav ser på amerikansk skolematematikk».

Pedagogdagen avslutades med gemensam middag på Odd Fellow Orden.

Per Häggmark

Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning

höll sitt ordinarie vårsammanträde söndagen den 12 april 1959. Mötet hade förlagts till Kockums mekaniska verkstad i Malmö och ägnades — förutom åt rena föreningsangelägenheter — helt åt problem som rör det besökta företaget.

Till föreningens ordförande för år 1959 omvaldes lektor Arvid Leide.

Sekreterare för samma tid blev lektor Stig Andersson och kassör läroverksadjunkt Erik Malmsjö. Även dessa båda omvaldes. Som ny ledamot i styrelsen i stället för lektor Axel Jönsson, Malmö, vilken önskat avgå, valdes fil. lic. Göran Leide, Lund. Styrelsen omvaldes för övrigt.

Civilingenjör Nils G. Leide inledde huvudprogrammet med ett anförande betitlat »Några ord om Kockums varv och mekaniska verkstad». Han redogjorde för hur företaget utvecklats från att ha varit ett mindre gjuteri år 1840 till ett världsomfattande varv i våra dagar.

I ett föredrag över ämnet »Atomfysik och skeppsbyggeri» lämnade tekn. lic. Bryan Mc Hugh en översikt över dagens situation beträffande reaktordrivna fartyg. Han meddelade att trots att man redan nu har atomdrivna båtar för krigsbruk torde det dröja minst tio år innan man kan räkna med atomdrivna handelsfartyg. Kapitalkostnaderna för dylika är f. n. enorma. — Experiment och projektering av olika slags reaktordrivna fartyg pågår emellertid för fullt. Fartygskonstruktörer och atomfysiker får här arbeta hand i hand. Ett problem av synnerligen vital betydelse är givetvis hur man skall kunna eliminera den radioaktiva strålningen utan att behöva bygga alltför tunga skyddande betongväggar. Det är särskilt γ-strålningen och neutroner, som är svåra att komma tillrätta med.

Efter dessa inledande föredrag fick deltagarna vara med om en två timmars, mycket intressant rundvandring genom anläggningarna under sakkunnig ledning. *Stig Andersson*

Bokanmälningar

J. H. Weinacht, *Prinzipien zur Lösung mathematischer Probleme.* Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1958, viii + 116 S., DM 8,80.

Enligt företalet har författaren under mångårig verksamhet som matematiklärare städse varit angelägen att framhäva och utforma sådana ledmotiv och frågeställningar som äro ägnade att bana väg fram till lösning av matematiska problem. Han hävdar att »undervisningen härigenom höjer sig över det rent fackliga och blir en skolning i tänkandets metodik».

Av hans nu föreliggande pedagogiska testamente att döma bör han vara en utmärkt undervisare. Stoffet ligger till stor del inom den gamla tyska gymnasiekursen, det övriga hänför sig till tidigare årskurser vid seminarier och universitet. Boken vill vara till hjälp och ledning för lärare och studerande i främsta rummet, men de utförliga och klara deduktionerna, i förening med förträffliga figurer, göra den njutbar även för »Nichtmathematiker», intresserade av mate-

matisk metodik. Att geometriska uppgifter skola dominera är att vänta, ty de erbjuda de flesta möjligheterna att exemplifiera ifrågavarande »Prinzipien».

Efter ett inledande kapitel om bästa sättet för ett problems perception följer ett andra, betitlat »Entwerfen des Lösungsplans». Det innehåller efter en orienterande inledning fyra avsnitt med mönsterlösningar, av vilka de tre första avslutas med var sin mer eller mindre utförlig »Zusammenfassung». Dessa sammanfattningar förfalla icke till utsiktslösa systematiseringsförsök utan äro allmänt hållna. Om de här och var förefalla rätt abstrakta, behöver man blott se tillbaka på de föregående lösningar som åsyftas för att få innehållet konkretiserat.

Lösningarna avse i första hand det generella fallet; diskussion förekommer ofta, men icke obligatoriskt och fullständigt. Långa uppräkningar av undantagsfall och tillhörande möjlighetsvillkor ligga ju vid sidan av arbetets principiella uppgift. I ett kort avslutningskapitel understrykes emellertid vikten av grundlig diskussion liksom av generaliseringsförsök.

§ 1 vill belysa »statische Erkundung einer Figur». Där genomgås 12 exempel, alla geometriska. Det gäller utökning av figuren med hjälpelement, sammanställning av förefintliga relationer mellan elementen och uppsökandet av kombinationer som ge en lösning av problemet. Härvid tagas emellanåt även trigonometri-planimetri till hjälp.

I § 2, »dynamische Erkundung einer Figur», behandlas 14 exempel, även de geometriska. Med den valda rubriken menar förf. figurens kontinuerliga deformering genom att vissa element tillåtas att variera. Härigenom beredes plats för »das funktionale Denken», som förf. särskilt omhuldar. Naturligt inställer sig metoden med geometriska orter, men även enparametriga linjeskaror med tillhörande envelopper utnyttjas i flera fall. Naturligt ledes tanken här också över på transformationer, och »Dreh-Streckung» genomgås och användes flitigt. (Diskreta translationer och rotationer i form av eleganta »pussel» förekomma redan i § 1.) Koordinatgeometri, kinematik, vektorbeteckning anlitas i enstaka fall.

I följande § 3: »Ändere das Problem ab!» sammanföras 16 exempel, av vilka 4 à 5 algebraiska. Det talas om »förändringar» sådana som att ersätta en figur med en annan plan- eller rymdfigur, en ellips eller kägelsnitt i allmänhet med en cirkel, cirklar med räta linjer eller cirklar (resp. parallell- och centralprojektion samt inversion, som i korthet omnämnas), att tolka ett geometriskt villkor analytiskt m. m.

En sträng klassificering är givetvis svår att upprätthålla.

I § 4, »Löse das Problem auf algebraischem Wege!» givas tre geometriska exempel. Det ges till att börja med några goda råd. Att denna metod ensam kan avgöra om det lönar sig att fortsätta resultatlösa

försök att nå fram med de traditionella hjälpmedlen passare och linjal påpekas till sist under hänvisning till kubens fördubbling m. fl. och konstruktion av reguljära polygoner.

Av denna översikt kan man endast få en ofullständig uppfattning om det rika innehållet. På ett ställe citeras den gode W. Busch: »Das Schlüsselloch man leicht vermisst, wenn man es sucht, wo es nicht ist.» Sistnämnda misstag gör sig J. H. Weinacht ej skyldig till. Ej nöjd med en lösning har han ofta två à tre, en gång sex att bjuda på. Även en läsare, vilken tillhör den alltmer glesnande skara som har egen erfarenhet av geometrien i det gamla gymnasiet här i landet, blir glatt överraskad av de friska uppslag och oväntade anknytningar förf. förmår avvinna även klassiska problem på vilka så mycken trycksvärta (och krita!) offrats. För den yngre generationen, som kanske sett ned på skolgeometrien, borde det vara av största intresse att genom studium av föreliggande arbete bilda sig ett begrepp om vad geometriundervisning kan ge, när den är som bäst. *J. Andersson*

L. Derwidué, *Introduction à l'algèbre supérieure et au calcul numérique algébrique*. Masson & Cie, Paris/Sciences et Lettres, Liége, 1959, 431 p., 6600 fr.

Föreliggande arbete ger en grundlig teoretisk genomgång av olika avsnitt inom algebra och matriskalkyl. Dessutom förekommer en utförlig beskrivning av den numeriska teknik som i olika sammanhang bör komma till användning.

Vad urvalet av stoff beträffar kunde en del äldre, skäligen ointressanta metoder gärna ha utelämnats till förmån för nya och effektivare förfaringssätt. Sålunda saknas t. ex. Bairstow's metod för komplexa rötter till en algebraisk ekvation och Jacobis och Givens' metoder för diagonalisering av matriser. Författarens sätt att skriva ett differensschema (p. 104) förefaller olämpligt. På sidan 268 definieras kvoten mellan två matriser A och B som AB^{-1}, vilket förefaller meningslöst, eftersom man ibland bör mena $B^{-1}A$, som är något helt annat.

En mängd genomräknade sifferexempel åtföljer behandlingen av de olika avsnitten. Detta är självfallet ytterst värdefullt, men man ställer sig likväl frågande inför de orgier i siffror som tilldrar sig t. ex. på sid. 226—227 i samband med Dandelin-Graeffes metod. I presentationen av arbetet hävdas med stolthet, att detta kanske är första gången som man på franska språket kan njuta av en fullständig beskrivning av den numeriska processen med hjälp av bordmaskiner. Rec. är av den meningen att det måste uppfattas som en väsentlig brist att ingen hänsyn tagits till att elektroniska siffermaskiner nu spelar en avgörande roll.

Trots de påtalade bristerna finns det mycket av värde i boken, som f. ö. kan ståta med sådana för franska böcker tämligen ovanliga egenskaper som att vara inbunden och ävenledes försedd med ordentlig innehållsförteckning samt alfabetiskt register. *Carl-Erik Fröberg*

George E. Forsythe, *Contemporary State of Numerical Analysis.* — Paul C. Rosenbloom, *Linear Partial Differential Equations.* Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958. Pp. 204, $ 7.50.

Av okänd anledning har dessa båda arbeten utgivits tillsammans. Det senare, omfattande 160 sidor, är skrivet av den i Sverige välkände specialisten Rosenbloom och siktar främst på den senare utvecklingen inom området (ung. från 1953). En mycket omfattande bibliografi, upptagande mer än 30 sidor, avslutar framställningen.

Anmälaren har koncentrerat sig på de 40 sidor som ägnats åt numerisk analys. Forsythe har här åstadkommit en glänsande exposé av den numeriska analysens aktuella position, och självfallet har han låtit siffermaskinerna ge framställningen den rätta reliefen. Särskilt fäster man sig vid två drag: dels refereras en rad nya och högst aktuella metoder, dels har förf. med stor omsorg penetrerat den hithörande ryska litteraturen. Det framgår av Forsythes redogörelse att en mängd ytterligt värdefulla bidrag under den senaste tiden kommit från ryskt håll och i hög grad förtjänar uppmärksamhet. Hela uppsatsen kan varmt rekommenderas. *Carl-Erik Fröberg*

L. Lewin, *Dilogarithms and Associated Functions.* Macdonald, London, 1958. Pp. xvi+353, 65s. net.

Föreliggande bok försöker förklara förekomsten av relationer av formen

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log(1-x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\log 2)^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

Detta sker med hjälp av teorin för funktionen

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\log(1-z)}{z}\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$$

som i boken kallas dilogaritmen för z. Ovan anförda relation fås ur följande funktionalekvation för $\mathrm{Li}_2(x)$:

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \log x \log(1-x)$$

Genom att här sätta $x = \frac{1}{2}$ får man den först angivna formeln. För $\mathrm{Li}_2(x)$ finnas ett antal mer eller mindre komplicerade funktional-

ekvationer. Dessa genomgås med elementära bevis. Tyvärr tycks ingen enhetlig metod finnas för härledningarna, utan dessa verka mycket speciella.

Förutom funktionen $\mathrm{Li}(z)$ (med komplext argument) och närbesläktade funktioner behandlas allmännare funktionerna

$$\mathrm{Li}_n(z)=\int_0^z \frac{\mathrm{Li}_{n-1}(z)}{z}\,dz=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^n},\ \text{för } n=3,4,5,\ldots$$

Även för dessa funktioner finnas funktionalekvationer, med vilka vissa funktionsvärden kunna bestämmas. Mest bekant är nog relationen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}=\zeta\,(2n)=\frac{\pi^{2n}\,2^{2n-1}}{(2n)!}\,B_n$$

där B_n beteckna Bernoullis tal.

Denna trevliga och innehållsrika bok som, ehuru den är elementärt skriven, inte alltid är lättläst avslutas med en omfattande formelsamling och några korta tabeller över vissa grundfunktioner, ur vilka de övriga funktionerna kunna beräknas.

Boken kan varmt rekommenderas åt dem som äro intresserade av formelmässiga kalkyler och resultat. *Hans Riesel*

A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis.* Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958. Pp. 428, $ 12.50.

Det vore felaktigt att påstå att denna bok fyller ett länge känt behov. Det finns ett stort antal monografier över detta ämne, och många av dem är goda läroböcker. Det är emellertid ingen tvekan om att boken kvalitetsmässigt hävdar sig synnerligen väl i den hårda konkurrensen.

Inledningsvis diskuteras linjära rymder, och efter en kort introduktion av de enklaste topologiska grundbegreppen följer ett kapitel om topologiska linjära rymder av olika typer. Framställningen övergår sedan i att diskutera Banach-rymder inklusive spektralanalys av linjära operatorer. Speciellt studeras Hilbert-rymder, och här visas spektralsatserna för unitära och för begränsade självadjungerade operatorer. Teorierna tillämpas bl. a. på lösningen av integralekvationer. Boken avslutas med ett kort kapitel om integrationsteori och bestämning av de begränsade linjära funktionalerna på speciella funktionsrymder.

Boken är synnerligen välskriven och lättläst. Att inte läsaren påträffar några komplikationer i fråga om begreppsbildning och bevisföring beror emellertid delvis även på att författaren avsiktligt utelämnat många skrymmande eller tunga moment i teorin. I stället görs

på dessa punkter osjälviska hänvisningar till konkurrerande läroböcker. Uppläggningen är tillräckligt abstrakt, för att inte läsarens föreställningsvärld skall låsas fast vid någon konkret modell. Abstraktionen blir dock aldrig något självändamål, och exemplifieringar i rik mängd ger anknytning till de klassiska problemställningarna i funktionalanalysen.

Åt dem som önskar en första introduktion i ämnet kan boken varmt rekommenderas. *Yngve Domar*

Daniel Dugué, *Traité de statistique théorique et appliquée.* Masson, Paris, 1958. 313 p., 5200 fr.

— *Arithmétique des lois de probabilités.* Mémorial des Sciences Mathématiques. Gauthier-Villars, Paris, 1957. 50 p., 1000 fr.

Daniel Dugué är en framstående sannolikhetsteoretiker, som enligt fransk tradition mest intresserar sig för de matematiska aspekterna på sannolikhetskalkylen och statistiken. Så länge han sysslar med sannolikhetskalkyl är detta helt i sin ordning, eftersom denna disciplin, alltsedan Kolmogoroff år 1933 publicerade sitt berömda axiomsystem, kan betraktas som en gren av den allmänna mängd- och måtteorien. Därför är också det lilla häftet från Gauthier-Villars av intresse för varje teoretiker som mer ingående ägnar sig åt studiet av de karakteristiska funktionerna och deras användning.

Likaså är de första hundra sidorna i den större boken läsvärda för envar som önskar specialisera sig på konvergensdefinitioner samt på gränsvärdessatser sådana som svaga och starka lagen för de stora talen, lagen för den itererade logaritmen och Kolmogoroff-Smirnoffs teorem (centrala gränsvärdessatsen behandlas ej).

Däremot blir man konfunderad över författarens inställning till sitt ämne i den statistiska delen av boken. Sålunda presenterar han teorien för försöksplanering under rubriken »Algèbre aléatoire» och romerska kvadrater under underrubriken »Carrés latins et corps de Galois». Innehållet stämmer väl med överskrifterna. Hur man med en sådan inriktning skall kunna lära de studerande att planera försök är inte lätt att förstå. Över huvud taget är disposition och ämnesval i denna bok så förbryllande, att man är frestad att fråga, om de inte dikterats mer av författarens intresse för diverse från varandra isolerade frågor än av en önskan att ge en allsidig framställning av ämnet.

Om sålunda den större boken inte är lämplig såsom lärobok i statistik, bör det dock understrykas att den har värde för teoretikern såsom uppslagsbok i speciella frågor. Till detta omdöme bidrager det förhållandet, att åtskilliga av de behandlade satserna hittills endast varit tillgängliga i tidskriftslitteraturen. *Gunnar Blom*

Hugo Sirk, *Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker*, 8. Aufl. Verlag von Theodor Steinkopf, Dresden und Leipzig, 1957, 315 S., DM 14.50.

Detta är en förbryllande bok. Förf. har velat skriva en lärobok i matematisk analys speciellt för kemister. Hans metod är genomgående att via exempel från kemisk kinetik, termodynamik, mekanik m. m. introducera matematiska begrepp och frågeställningar. Naturligtvis är det i en lärobok i matematik värdefullt med hänvisningar till hur de erhållna resultaten praktiskt kan utnyttjas, men att bygga upp hela framställningen enligt denna metod kan inte — som även framgår av Sirks bok — ge de fasta matematiska kunskaper, som numera krävs för framgångsrika kemistudier.

Till att börja med diskuterar förf. funktionsbegreppet. Här liksom senare i boken får man ej någon klart preciserad definition. Däremot diskuteras ett flertal exempel på funktioner. Själva funktionsbegreppet blir dock dunkelt för läsaren — (Är en funktion en mängd punktpar, en regel eller kanske en kurva? Måste en funktion vara entydig?) — Även förf. själv synes sväva i dunkel. På sid. 23 får man nämligen läsa: »Derivatans värde ändras med x och är alltså en funktion av x utom vid linjära funktioner.» Därefter diskuterar förf. derivatan utan att först diskutera funktioners kontinuitet. Detta enligt förordet »för att ej fresta läsarens tålamod». Derivatan införes via problemet att definiera den momentana hastigheten för en fritt fallande kropp. Denna mångordiga diskussion upptar cirka 8 sidor, och förf. introducerar bl. a. »hjälppunkter», som med konstant hastighet rör sig utefter kordan till väg-tid-diagrammet. Efter att så småningom ha kommit fram till derivatans definition skall förf. på sid. 24 slutligen oberoende av den tidigare diskussionen definiera hastigheten med hjälp av derivatan. Han säger då: »Betrakta en punkt, som i A har hastigheten v ...». Dylika logiska inkonsekvenser återkommer hela boken igenom.

Betecknande är också behandlingen av »oändligt små storheter». Förf. pläderar för ett mindre stringent språkbruk i naturvetenskapliga avhandlingar. Som exempel kan nämnas: »Det oändligt lilla vägtillskottet ds är lika med hastigheten multiplicerad med den oändligt korta tiden dt (sid. 25). För oändligt liten vinkel sammanfaller kordan och bågen (sid. 21). Om man tänker sig sträckan indelad i oändligt små intervall dx» (sid. 240). Irriterande är också den ofta använda frasen: »Då uttrycket är av formen 0/0, måste vi använda ett trick.» Behandlingen av dylika uttryck är f. ö. felaktig.

Bestämda integraler behandlas som summor av differentialer. Dubbelintegraler införes endast med ett exempel rörande kraftverkan

mellan två stavar och då som resultatet av två integrationer. Trots detta beräknar förf. genast $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ med en dubbelintegral och sätter då »av geometriska skäl» $dxdy=rdrdv$.

I ett omfattande appendix repeteras olika avsnitt av »elementarmatematiken» såsom algebra, geometri, trigonometri m. m. Dessutom innehåller detta ett avsnitt om Newtons interpolationsformel (utan restterm), Fourierserier och sannolikhetskalkyl med matematisk statistik. Den moderna utvecklingen av de två sistnämnda områdena är helt obekant för förf.

Det sagda torde räcka för att ange bokens karaktär. Utrymmet räcker ej till för alla de anmärkningar och frågetecken anmälaren antecknat vid genomgången av boken. Även om man i en matematisk lärobok ibland får rucka på stringenskravet, är enligt anmälarens åsikt och erfarenhet den lärogång bäst, som kommer sanningen så nära som möjligt. En bok av denna karaktär borde egentligen ej få uppta utrymme i Elementas spalter, men då Sirks bok tycks ha fått en viss spridning här i landet och även omtryckts i flera upplagor är det all anledning att granska densamma. *Lennart Råde*

W. R. Myers, *Theoretical Electromagnetism.* Butterworths Scientific Publications, London 1958. Pp. 274, 42 s.

På senare år har ett flertal böcker i teoretisk elektricitetslära för universitets- och högskolestadiet publicerats. Några av dem är otvivelaktigt av mycket hög klass, men då man försöker göra en jämförande värdering av dem, måste man ju också ta hänsyn till för vilka läsare de är mest lämpade. Myers bok har ett omfång och ett innehåll, som ganska väl motsvarar den del av elektricitetsläran, som läses för 2 betyg i ämbetsexamen i teoretisk fysik med mekanik vid universiteten. Några avsnitt, t. ex. teorien för svängningskretsar, hör bättre hemma i fysikkurserna, medan några andra avsnitt har en mera teknisk anstrykning. Dessa avsnitt har dock ett relativt litet utrymme och tjänar huvudsakligast till att belysa de allmänna principerna.

Efter en traditionell framställning av elektrostatiken (38 sidor) följer magnetostatiken (44 sidor), vilken är byggd på lagen om kraften mellan två strömelement, induktionslagen (13 sidor), Maxwells ekvationer och kretsteori (45 sidor) samt elektromagnetiska vågor (69 sidor) inklusive teorien för metallreflexion och den rektangulära vågledaren. Det måttsystem, som används, kallas MKSC-systemet, vilket innebär, att coulomb träder in i stället för ampère som grundenhet. Boken avslutas med ett 20-tal standardbetonade men väl utförda exempel ur elektrostatiken. *Nils Svartholm*

Calculus of Variations and its Applications, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. VIII, McGraw-Hill Book Co., New York, 1958. Pp. 151, 58 s. net.

Boken, som redigerats av L. M. Graves, innehåller nio uppsatser, som på inbjudan föredragits vid ett symposium för variationskalkyl vid University of Chicago i april 1956 samt dessutom två kompletterande diskussionsinlägg.

Innehållet omspänner mycket olikartade ting, från funktionalanalysens användning på variationskalkyl och egenvärdesuppskattning till bl. a. tillämpningar på problem i geometrisk optik, hydrodynamik, elasticitets- och plasticitetsteori samt modern operationsanalys. De läsare, som utan ingående förberedelse skulle kunna tillgodogöra sig hela det heterogena stoffet, torde vara lätt räknade. Å andra sidan utgör böcker av detta slag, som visar hur vissa grundtankar kommit att slå igenom på de mest skilda områden och där varje artikel är försedd med utförliga litteraturhänvisningar, en utmärkt introduktion för den som vill orientera sig på området. Papper och tryck är av förlagets vanliga höga standard, men priset är också i högsta laget för en bok av detta omfång. *Folke K. G. Odqvist*

Oskar Höfling, *Physik-Aufgaben.* Lehrerausgabe mit vollständigen Lösungen. Mittelstufe, 211 S., DM 9,80; Oberstufe, 292 S., DM 11,80. Dümmlers Verlag, Bonn, 1957 resp. 1959.

De i Elementa *41*, 228, 1958 omnämnda samlingar av fysikaliska övningsuppgifter (Schülerausgabe), som Höfling utgivit i anslutning till sin i Elementa *41*, 69, 1958 recenserade lärobok i fysik, har även utkommit i en för lärare avsedd version, som innehåller lösningar till de 1000 problemen i elevupplagan. Lösningarna är utförda med minutiös noggrannhet, varigenom läraren snabbt får besked om problemens natur och användningsmöjligheter med hänsyn till genomgångna kursmoment. De fysikaliska storheternas sorter stämmer överens med den svenska gymnasiekursens och redovisas omsorgsfullt i alla beräkningar. De återfinnes sålunda inte endast i de ursprungliga uppställningarna och ekvationerna utan upprepas ofta led för led till dess att lösningen erhållits. Sorträkningarna löper parallellt med de numeriska beräkningarna. Om en så konsekvent, i varje detalj genomförd sortredovisning alltid lönar mödan kan kanske diskuteras. Genom lämpliga kommentarer ställs enskilda problembehandlingar i relation till metodiska frågor av allmän karaktär. Kosthållet i fysikalisk problemlösning har fått ett mycket värdefullt tillskott genom Höflings exempelsamlingar, som därför varmt kan rekommenderas.

Birger Grundström

VICTOR L. STREETER, *Fluid Mechanics,* Mc Graw-Hill Book Co., New York/London, 1958, Pp. 480, 58s. net.

Det finns nu en stor mängd amerikanska läroböcker över hydromekanikens grunder, som vänder sig till folk, som äro intresserade mer av tillämpningarna än av de teoretiska problemställningarna. För ingenjörer, fysiker, kemister, medicinare etc. är denna bok av Victor Streeter, professor i hydraulik vid University of Michigan, en förträfflig sammanställning av nyttigt vetande. De teoretiska härledningarna äro utförda ytterst schematiskt och formellt men ger i alla fall en känsla av förståelse för de grundläggande teorierna. Nödvändiga förkunskaper är exempelvis kursen för godkänd i fil. kand.-examen.

Innehållsmässigt äro böcker av detta slag mycket snarlika med vätskestabilitet, flytande kroppars jämvikt, ideella vätskors dynamik med tillämpningar av Bernoulli's teorem, viskösa vätskors strömning med Poiseuille's formel, dimensionsbetraktelser och något om gasdynamik. Denna bok utgör emellertid ett bevis på att det går att ge ett gammalt och välkänt tema en ny touche, om man som Streeter är verksam inom modernt tekniskt utvecklingsarbete.

Det inledande kapitlet behandlar vätskors och gasers fysik. Synnerligen förtjänstfullt är att även tabeller och diagram över viskositet och ytspänning för våra vanligaste vätskor och gaser medtagits. Att sorterna valts enligt anglosaxisk praxis ger tillfälle till nyttiga omräkningsproblem.

Beskrivningen av turbulensfenomen följer klassiskt mönster från den tyska Göttingenskolan med Prandtl's »blandningslängd» etc. Detta får nog anses vara ett högst omodernt och numera föråldrat sätt att beskriva dessa fenomen. För en tekniker äro emellertid alltjämt Prandtl's teorier i många fall de enda, som står till buds, när det gäller att genom teoretiska värderingar dra kvantitativa slutsatser, vilket kan försvara turbulensavsnittets utformning i en bok som denna. Vidare finnes en kort men välredigerad översikt av laminära och turbulenta gränsskikt varvid även värdefulla empiriska formler och resultat presenteras.

Boken avslutas med ca 200 sidor praktiska tillämpningar av hydromekaniken. Turbiner, strömningsmätare, strypningsfenomen etc. behandlas pedagogiskt skickligt med väl avvägd inblandning av nyttig empirisk kunskap. Slutkapitlet om hydrauliska servomekanismer och regleringsteknisk vätskenivåkontroll fullständigar intrycket av en modern lärobok om teknisk hydromekanik och hydraulik.

För läsarens övning finns hundratals enkla men välfunna räkne- och kunskapsproblem. *Bengt Joel Andersson*

R. Comolet, *Introduction à l'analyse dimensionelle et aux problèmes de similitude en mécanique des fluides.* Masson & Cie, Paris, 1958, 116 p., 1600 fr.

Sällan har väl en ren lärobok tryckts på papper av bättre kvalitet. Detta är bra, eftersom boken behandlar teknisk-teoretiska problemställningar med tidlös aktualitet.

Många mekaniska problem, bl. a. inom hydrodynamiken äro så komplicerade, att de äro oåtkomliga med en rent teoretisk analys. Det är då välbekant bl. a. för varje svensk civilingenjör, att man många gånger genom dimensionsanalys kan planera praktiskt utförbara modellförsök, och med utgångspunkt från därvid erhållna empiriska resultat kan man utvärdera aktuella storheter för tekniska konstruktioner. Dimensionsanalysen behandlas mycket utförligt i professor Faxéns välkända läroböcker i mekanik, och denna bok ger ingenting nytt utöver vad som ingår i utbildningen för svenska högskoletekniker.

Comolet ger sig inte in på nya kunskapsteoretiska aspekter, och boken är närmast avsedd för tekniker, som skall planlägga modellförsök, exempelvis av fartyg, flygplan, hamnar etc.

Om boken alltså inte ger tekniker med svensk utbildning något väsentligt nytt, så är den i alla fall mycket välkommen därför att den ger en mycket välredigerad sammanställning av nyttigt gods. Boken rekommenderas därför var och en, som anser sig behöva en repetition i ämnet. *Bengt Joel Andersson*

Elasticity and Plasticity, Surveys in Applied Mathematics, Vol. I, Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958. Pp. 152, $ 6.25.

Detta är det första bandet i en planerad serie över tillämpad matematik som publiceras i samarbete med Office of Naval Research and Applied Mechanics Reviews. Författare är J. N. Goodier för den förra och P. G. Hodge Jr för den senare av titelns båda delar.

Enligt förordet avser den nya serien att summera dagssituationen inom de angivna områdena särskilt med hänsyn till matematikens egen utveckling och under beaktande av svåråtkomligare nyare litteratur t. ex. i öststaterna. Serien riktar sig mindre till specialisterna än till den matematiskt bildade läsaren inom olika områden av naturvetenskap och teknik.

Inom elasticitetsteorien har på senare tid och främst genom insatser av ryska författare de funktionsteoretiska metoderna fått ökad användning. Dessa refereras här. Av andra områden i blickpunkten må nämnas värmespänningar och utbredning av elastiska vågor.

Avdelningen plasticitetsteori, som likmätigt sin aktuella betydelse

fått lägga beslag på två tredjedelar av bokens omfång, gör anspråk på att huvudsakligen referera framstegen under det senaste decenniet. Man har därvid rätt att vänta sig särskild hänsyn till det som presterats vid Brown University inom W. Pragers skola, från vilken författaren utgått. Så är också fallet t. ex. beträffande de minimiprinciper för energien som här utvecklats. Andra områden såsom plastisk vågutbredning och krypning utelämnas medvetet. I gengäld är texten i de medtagna delarna i regel utförlig och lätt läsbar. Den omfattande bibliografien innehåller även på detta område påfallande många ryska arbeten.

Boken, som sålunda innehåller en översikt av material, som hittills endast varit tillgängligt i ofta svåråtkomliga specialtidskrifter, kan livligt rekommenderas. *Folke K. G. Odqvist*

Amasa S. Bishop, *Project Sherwood* — The U. S. Program in Controlled Fusion. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1958. Pp. 216, $ 5.75.

Heinz Fischer/Lawrence C. Mansur (Editors), *Conference on Extremely High Temperatures.* Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958, Pp. 258, $ 9.75.

Dessa två böcker är av mycket stort intresse för dem som sysslar med s. k. plasmafysik i den (kanhända fåfänga) förhoppningen att det så småningom skall bli möjligt att tämja väteenergien. Speciellt Bishops bok kan varmt rekommenderas även för en vidare krets. Den påminner i vissa avseenden om en slags Smythrapport, dvs. den populära redogörelse som USA gav ut efter det att problemet med uranenergien hade lösts. Likheten inskränker sig dock till formen. Skillnaden är väsentlig därigenom att Smythrapporten behandlade ett problem som lösts, under det att Bishops bok redogör för ett problem som icke lösts, ja som kanske t. o. m. inte kommer att lösas. Därom vet vi f. n. ingenting med säkerhet. Utomordentligt stora ansträngningar göres sedan några år tillbaka på detta forskningsfält, och Bishops bok redogör för de amerikanska projekten. De olika problemen beträffande plasmastabilitet, temperatur och olika typer av magnetfältskonfigurationer beskrives på ett förhållandevis lättfattligt sätt, och boken är illustrerad med färgplanscher som i åskådlighet är föredömliga.

Under de senaste åren har en rad konferenser hållits över detta område. I USA förekommer flera sådana årligen, och en av dessa behandlas i »Conference on Extremely High Temperatures», vilken hölls i Boston för jämnt ett år sedan. Denna konferens, som naturligtvis i betydelse på intet sätt kan jämföras med den senare hållna Genèvekonferensen över atomenergiens fredliga utnyttjande i september 1958,

tar kanske inte i första hand sikte på fusionsenergien som sådan, utan huvudvikten ligger snarast på problem om användningsmöjligheter vid något lägre temperaturer. Produktionen av sådana temperaturer diskuteras i olika uppsatser, och metoder att uppmäta dem, speciellt spektroskopiskt, diskuteras. En uppsats behandlar sådana framtidsvyer som »plasmamotorer» etc. För den som närmare ägnar sig åt plasmafysik är boken givetvis på sitt sätt värdefull, men Bishops bok är utan tvivel den som i första hand kan rekommenderas.

Kai Siegbahn

Maurice J. Sinnott, *The Solid State for Engineers.* John Wiley & Sons, New York / Chapman & Hall, London, 1958, Pp. 522, $ 12.50.

Litteraturen inom det fasta tillståndets fysik är av anmärkningsvärt sent datum med tanke på den allt större vikt, som detta område numera tillmätes. Terminologien, innebörden av »solid state physics», har redan efter ett decennium ganska väl stabiliserats och kan i förenklad form anses utgöra ett koncentrat av såväl den experimentella som teoretiska fysik, som utgör grundvalar för en *samordnad* förståelse av det fasta tillståndets egenskaper (främst metaller och legeringar). Inte minst teknikens hårda tryck på vidgade kunskaper har befrämjat utvecklingen inom detta område, vars kärna är renodlat fysikalisk men vars perifera delar faller delvis eller helt inom tekniska discipliner. Långt innan begreppet solid state physics präglats och vunnit burskap, stod dock vissa delvis isolerade sektorer av fysiken i förgrunden för det fasta tillståndet, såsom kristallografien och metallers magnetiska egenskaper. Avancerad experimentell forskning, inte minst efter andra världskriget, jämte vidgade teoretiska kunskaper, där främst kvantmekaniken verkat särdeles befruktande, har emellertid nu lett fram till kunskaper med helt annan systematik än tidigare, vilket inte minst framträtt i den speciella litteratur, som producerats inom detta område under de senaste fem åren. Det torde vara tillfyllest att nämna namnen Kittel och Decker i detta sammanhang.

Det fasta tillståndet kan studeras från två skilda håll: från den makroskopiska sidan, utifrån, tidigare teknikens betraktelsesätt, samt från den mikroskopiska sidan, inifrån, fysikens betraktelsesätt. »The solid state physics» är den nu utvecklade, förenande länken mellan dessa diametrala betraktelsesätt. Det torde inte vara någon överdrift att påstå, att forskningen i huvudsak präglats av en utveckling »inifrån». Omfattande kunskaper i modern fysik har därför blivit en förutsättning för att kunna tillgodogöra sig den nya litteraturen.

Sinnott har emellertid givit sig i kast med den svåra uppgiften att behandla ämnet utgående från strikta fysikaliska resonemang men i

sådan utformning, att boken kan studeras även av teknikern, som ej haft möjlighet att tillägna sig omfattande kunskaper i modern fysik. Resultatet måste anses utmärkt, men nog måste vissa elementa även av modern fysik vara läsaren bekanta. En kanske väl kortfattad framställning av atomernas elektronstruktur bildar upptakten, följd av kristallografi, röntgen- och elektrondiffraktion, allt i elementär framställning. Jämvikt behandlas i anknytning till termodynamik och fasdiagram. De fundamentala bindningsproblemen ägnas 100 sidor, en i huvudsak beskrivande framställning med utmärkta illustrationer. Plastiska och elastiska deformationer hos kristalliniska ämnen föregår ett kapitel över dislokationer (avvikelser från idealgitterstruktur). Mekaniska och termiska egenskaper behandlas översiktligt, de senare med förhållandevis fyllig teori. I bokens 200 sista sidor redogör förf. för elektronteoriens utveckling från Drude-Lorentz över Sommerfeld framtill den på kvantmekanisk grund nu vedertagna uppfattningen. Zonteori, elektriska, magnetiska och optiska egenskaper, transistorteori är exempel på vad här behandlas utifrån en mycket välavvägd teoretisk bakgrund.

Med nöje och behållning och utan särdeles stor ansträngning bör många kunna studera detta verk och för den, som på ett eller annat sätt varit engagerad i atomfysikundervisning bör boken vara en källa till extra glädje: kunskaper i materiens innersta struktur blir alltmera oumbärliga för ett allt större antal av forskningens och teknikens män.

Eve Staffansson

V. K. Zworykin/ E. G. Ramberg/L. E. Flory, *Television in Science and Industry.* John Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958. Pp. 300, $ 5.00.

Här i landet, där utbyggandet av televisionsnätet som bäst pågår, förknippar man gärna ordet television med en form av underhållning. Television i vidsträcktare bemärkelse har emellertid en mångfald andra användningsmöjligheter i nutidens och framtidens samhälle. Televisionsprincipen tillämpad inom dessa övriga områden brukar sammanfattande och något oegentligt betecknas som industritelevision. I amerikansk terminologi användes det bättre uttrycket »closed-circuit television» ofta synonymt med »industrial television».

Författarna till föreliggande arbete har tagit till sin uppgift att närmare kartlägga industritelevisionens användningsmöjligheter. I företalet säges: »— — — we seek to explore the function of television as an extension to human sight and to describe the tools which have been developed to realize it».

Bland författarna återfinnes en av televisionens pionjärer, ikonoskopets uppfinnare V. K. Zworykin, vilken liksom medförfattarna un-

der många år varit knuten till RCA:s forskningslaboratorier. Författarna besitter alltså rika erfarenheter inom det område, de valt att behandla.

Boken inledes med en kort men innehållsrik televisionshistorik, varefter i följande kapitel ges en intresseväckande sammanfattning av televisionens användningsmöjligheter inom industri, forskning, medicin, utbildning, krigsmakt, handel med flera områden. Betecknande för författarnas syn på televisionens möjligheter är kapitelinledningen: »Whenever it is too dangerous, too difficult, too expensive, too inconvenient, too inaccessible, too tiring, too far, too hot, too cold, too high, too low, too dark, too small to observe directly, use television».

Kapitel 3 behandlar kortfattat den apparatur, som kommer till användning inom industritelevisionen och diskuterar rör, kretsar och kopplingar på sådant sätt, att endast en förhållandevis elementär kunskap i elektronik är erforderlig för att man skall ha behållning av detta kapitel. Användning av transistorer och modern miniatyrteknik beröres något.

Kapitel 4, som omfattar närmare hälften av bokens sidantal, söker ge en bild av industritelevisionens ställning och möjligheter, sådana de uppfattades av författarna 1957. Ett stort antal exempel på i praktiken utförda industritelevisionsanläggningar inom ett flertal tillämpningsområden analyseras utförligt. Av, åtminstone för anmälaren, speciellt intresse är det korta avsnittet om amerikansk erfarenhet av televisionen i undervisningens tjänst. I detta liksom i övriga kapitel åtföljes texten av ett mycket rikhaltigt och förstklassigt bildmaterial. Det är svårt att i boken leta fram ett uppslag utan illustrationer. Varje kapitel avslutas med fylliga och väl valda litteraturreferenser.

Boken avslutas med några korta reflexioner över den framtida utvecklingen och som slutord säger författarna: »And if, in the distant future, men should decide to forsake this planet, their flight will not be into the unknown, but subject to known risks and expectations, thanks, in large part, to television».

Sammanfattningsvis kan sägas, att boken är att rekommendera åt den, som önskar en fyllig, lättillgänglig och initierad bild av industritelevisionens nuvarande läge och utvecklingsmöjligheter.

Ingvar Svensson

John W. T. Walsh, *Photometry*. Constable & Co. Ltd., London, 1958. Pp. 544, 63s. net.

Föreliggande bok är den tredje utgåvan av denna välkända monografi i fotometri. Den första utkom redan år 1926 och den andra, helt omarbetade upplagan för blott fem år sedan. Då hade boken till ungefär två tredjedelar blivit omskriven och moderniserad, bl. a. med

hänsyn till den fotoelektriska försöksmetodiken. Det sålunda reviderade verket kom i rik utsträckning att meddela de erfarenheter, som förf. gjort under sin långa verksamhet vid N. P. L. i Teddington. Den tredje utgåvan skiljer sig från den andra endast genom små ändringar och tillägg.

Fotometrins olika principer är allsidigt och ingående belysta, och även kolorimetrin är väl tillgodosedd i ett härått ägnat kapitel. En vetgirig läsare kan få direkt svar på de flesta frågor inom området och möjlighet till fördjupad kunskap genom de många litteraturhänvisningarna i slutet av varje kapitel. Vad man emellertid gärna skulle önska, vore en redovisning av nyutvecklade fotometriska hjälpmedel, såsom senaste typer av fotoceller, fotomultiplikatorer, förstärkare och spektrofotometrar. Om — av pedagogiska och historiska skäl — äldre apparatur beredes rikligt utrymme, kunde dock säkert detta i nästa upplaga utan men inskränkas något till förmån för det allra senaste.

Den gediget utstyrda, väl illustrerade boken med sitt koncisa sakinnehåll kan alltfort varmt rekommenderas till dem som har intresse av fotometrisk teknik. *Gunnar Günther*

A. A. Shepherd, *An Introduction to the Theory and Practice of Semiconductors.* Constable & Co Ltd, London , 1958. Pp. 206, 18s. 6d.

Behovet av elementära monografier över de moderna halvledarmaterialen och deras tillämpningar som ventiler, transistorer och fotoelement m. m. har givetvis ökat starkt, sedan de praktiska tillämpningarna nu tagit stark fart. Shepherds bok är ett försök att fylla en del av detta behov, och den riktar sig därvid till fysikstuderande och till forskare och tekniker i angränsande vetenskaper och teknik, som i framtiden kommer att behöva använda halvledarkomponenter i en ständigt stegrad omfattning. Bokens titel är dock något missvisande, eftersom innehållet huvudsakligen utgörs av en genomgång av delar av halvledarteorien för germanium och kisel samt tillhörande materialbehandling och komponentframställning.

Boken är fylld med formler och sakuppgifter, men materialurvalet förefaller mer att vara gjort på grundval av slumpvis sammanställda föredrag och artiklar än efter en fast enhetlig plan. Det kan därför blir svårt att ur texten få fram den överblick av området och halvledarkomponenternas fördelar och svagheter, som man gärna vill att en dylik monografi skall ge. Om man bortser från sistnämnda brist, bör boken dock kunna ge läsaren de grundkunskaper som erfordras för ett rätt utnyttjande av germanium och kiselkomponenter och för att vidare kunna studera deras kretsteknik. *Dick Lundqvist*

J. V. Jelley, *Čerenkov Radiation and its Applications.* Pergamon Press, London, 1958, Pp. 304, 65s.

Föreliggande bok är den första monografi som utgivits över Čerenkovstrålningen och dess tillämpningar. Framställningen inledes med en historik över Čerenkoveffektens upptäckt och en utförlig presentation av Franks och Tamms klassiska teori för fenomenet. Sedan följer en utmärkt sammanfattning av den efterföljande utvecklingen av teorien, vilken till stor del utförts av ryska forskare. Förutom de modifikationer i teorien som kvantummekaniken fordrar, ges i detta avsnitt en redogörelse för Ginsburgs förslag att utnyttja Čerenkoveffekten för generering av radiovågor av kort våglängd, 0,01—1,0 cm, medelst elektronknippen som passerar genom ett hål i ett dielektrikum. Čerenkoveffektens betydelse i ett plasma behandlas även jämte Vekslers förslag att utnyttja den »omvända» Čerenkoveffekten för acceleration av elektriskt laddade partiklar. De senare experimentella arbetena ägnas ett kapitel, i vilket märkes en redogörelse för mätningar av partiklar i den kosmiska strålningen medelst Čerenkoveffekten, dels genom vätskeformiga radiatorer, dels genom direkt utnyttjande av den Čerenkovstrålning som alstras i atmosfären — områden där dr Jelley själv gjort banbrytande insatser. Av avgörande betydelse för Čerenkovstrålningens utnyttjande inom den experimentella fysiken för mätning av laddade, energirika partiklar var utvecklandet av de moderna fotomultiplikatorerna. Dessas egenskaper med speciell hänsyn till deras lämplighet för användning i Čerenkovdetektorer beskrives även. I nästföljande avsnitt behandlas utförligt optiska och mättekniska synpunkter på utförandet av Čerenkovdetektorer för olika ändamål. Boken avslutas med en intresseväckande redogörelse för andra tänkbara tillämpningar av Čerenkovstrålningen.

Bokens innehåll är klart disponerat och väl avvägt i synnerhet för den experimentellt inriktade fysikern. En utförlig bibliografi samt en mängd experimentella data och anvisningar förhöjer bokens värde.

Allan Bergstedt

J. F. Elliot (Editor), *The Physical Chemistry of Steelmaking.* J. Wiley & Sons and The Technological Press, New York, 1958, Pp. 257, $ 15.00.

Sommaren 1956 hölls en internationell konferens om stålframställningens fysikaliska kemi vid Massachusetts Institute of Technology i USA, och de föredrag som där presenterades har nu publicerats tillsammans med de efterföljande diskussionerna. Antalet konferensdeltagare var ovanligt lågt, 42 stycken, beroende därpå att man endast accepterat aktiva forskare av sådan kapacitet att de kunde väntas komma med värdefulla bidrag till diskussionen. Därför ligger

också föredragen på en mycket hög nivå, och diskussionerna rör sig mest kring nya rön och tankegångar. Boken vänder sig alltså till en utvald läsekrets av specialister och kan knappast rekommenderas som introduktion i metallernas fysikaliska kemi för en kemist med annan specialitet.

Metallkemin skiljer sig väsentligt från de flesta andra grenar av kemin, kanske främst däri att molekyler ej förekommer i det metalliska tillståndet. Detta innebär i sin tur att inga homogena reaktioner förekommer, och sådana begrepp som reaktion av första eller andra ordningen är här helt främmande. I stället domineras framställningen i boken av fasgränsreaktioner och transportmekanismer, såsom diffusion och konvektion. Det är också karakteristiskt att man inom den del av kemiska industrin, som processmetallurgin utgör, har relativt liten nytta av att känna till jämviktsvillkoren för en viss process, eftersom man i praktiken hamnar långt därifrån. Långt viktigare vore då att kunna klarlägga kinetiken, men denna är oftast mycket invecklad och svåråtkomlig. Den fysikalisk-kemiska forskningen har därför hittills lämnat ganska obetydliga bidrag till den industriella utvecklingen inom processmetallurgin. Den har ännu inte riktigt hunnit ifatt den industriella utvecklingen, och i boken framkastas t. o. m. den tanken att den industriella utvecklingen, som för närvarande går mycket snabbt, drar ifrån ytterligare. *Mats Hillert*

Matematikkarta. Utgiven av AB Original-Odhner, Göteborg, 1959. Format ca 100×70 cm.

En mängd matematiska fakta och historiska data ryms på denna plansch. En rad av de herrar som alltifrån Thales på 500-talet f. Kr. berikat mänskligheten historia med matematiska problem och lösningar finns avbildade. Talsystem av historiskt intresse beskrivs. Satser från planimetri och stereometri formuleras och illustreras. Vackra bilder ges av t. ex. koniska sektioner, asteroid, kardioid och Arkimedes' spiral. I ett hörn finns en hel liten trigonometrisk formelsamling. Talet π återges med 2395 decimaler, vilket bör räcka för flertalet praktiska ändamål (statistikern kan här tillfredsställa ett måttligt behov av slumptal!). Fyrfärgsproblemet omnämns liksom det gamla problemet med de sju broarna i Königsberg. Utgivaren demonstrerar sitt räknemaskinintresse med en liten historik över utvecklingen på detta område, illustrerad med ett antal maskinritningar.

Den förnämliga kartan, som konstruerats av lektor Lennart Råde, har framställts i sjufärgsoffset av Tre Tryckare i Göteborg. Skolor, institutioner, etc., kan erhålla den kostnadsfritt från utgivaren.

Gunnar Blom

J. A. Bendat, *Principles and Applications of Random Noise Theory.* Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958, Pp. 431, $ 11.00.

Inom systemanalysen spelar den statistiska signalteorin en viktig roll. Den tillämpas med framgång på problem inom bl. a. radar-, kommunikations- och servotekniken. Ett exempel må vara det av Wiener lösta problemet med filtrering av en signal vid närvaro av störning för att därmed erhålla minsta kvadratiska felavvikelse mellan mottagen och alstrad signal.

Arbetet redogör med enkel matematik för metoder, som används vid behandling av brus och redovisar en rad tillämpningar. Autokorrelationsanalysen redovisas med bl. a. uppskattning av korrelationsfunktionen ur registreringar och beräkning av felet vid ändlig analystid. Det redan nämnda filterproblemet behandlas även med den generaliseringen att filtret innehåller med tiden variabla element. En annan variant av problemet gäller det fall att observation görs av signalen själv och av dess derivata, vardera observationen behäftad med fel, vilka är oberoende. En tillämpning kan vara dopplermätande radar. Ur observationerna skall endera läge eller hastighet eller bådadera uppskattas genom användning av linjära filter.

I de fall då bruset har en autokorrelationsfunktion med exponentiell karaktär visas en elegant metod för utvärdering av resterande felet efter filtrering genom att använda matematikmaskiner av analogityp. Problemet simuleras så att ingen statistisk utvärdering behövs, utan det kvadratiska felet kan direkt läsas av på instrument.

Ett aktuellt teoretiskt problem är brussignalens nollgenomgångar. För antalet nollgenomgångar per tidsenhet beräknas såväl medelvärde som spridning. *Lars-Henning Zetterberg*

W. A. Sexton, *Chemische Konstitution und biologische Wirkung.* Mit einem Geleitwort von A. R. Todd. Ins Deutsche übertragen von Friedrich Hölscher und Georg Hübscher. Verlag Chemie, Weinheim/Bergstr., 1958, 439 S., DM 29.60.

Denna bok är i sin engelska originalupplaga känd i vida kretsar. Den tyska översättningen är utförd från den 2:a engelska upplagan, (1953). Översättarna har strikt hållit sig till originalet med undantag av några få tillägg, vilka i huvudsak berör litteraturhänvisningarna. Behovet av översättningar av vetenskaplig speciallitteratur författad på världsspråk kan diskuteras. Om ett sådant behov verkligen anses föreligga, bör dock det främmande landets redaktioner vidtaga snabba åtgärder för publicering av översättningen, särskilt om det behandlade området har så snabb utveckling, som gäller för de mycket aktuella problemen över kemisk konstitution och biologisk verkan.

Innehållet i »Sexton» är alltför välkänt för att här motivera en närmare presentation. I 21 kapitel diskuteras dels allmänna synpunkter, såsom antagonism genom ämnesomsättningsprodukter, förändring av administrerade farmaka genom den levande organismen och inverkan av specifika kemiska grupper, dels mera speciella ämnesgrupper. Bland de senare kapitlen märkes baktericida och fungicida substanser, insekticider, kancer-framkallande medel, tillväxthormoner för växter, antigener och antikroppar, mot protozoer verksamma medel, antibiotika, kinoida föreningar, o. a. Varje kapitel kompletteras med väl valda hänvisningar till litteratursammanställningar och originalarbeten. Ett utförligt sakregister gör boken användbar som uppslagsverk i mindre skala.

Typografiskt är den tyska upplagan av mycket hög standard, i vissa delar förnämligare än den engelska, speciellt om jämförelse sker med den första upplagan av år 1949. *Klas-Bertil Augustinsson*

Francis Owen Rice, *Free Radicals* (Collected Papers). The Catholic University of America Press, Washington, D. C., 1958. Pp. xii+278. $ 5.00.

Boken utgör en samling av de 60 originalarbeten professor Francis Owen Rice och hans medarbetare publicerat inom de fria radikalernas kemi under tidsperioden 1931—1958. Arbetena har ursprungligen varit publicerade i J. Am. Chem. Soc. och andra lika välkända tidskrifter. Reproduktionen har skett enligt något av de moderna facsimile-förfarandena, varför boken är ekvivalent med en motsvarande samling särtryck, bundna i hanterlig form. Reproduktionen har också enligt förordet tillkommit dels för författarens och hans studenters bekvämlighet och dels för att tillgodose särtrycksbehovet.

En samling av detta slag tillåter knappast anläggandet av vanliga recensionssynpunkter. Reproduktionen är emellertid av utmärkt kvalitet. Innehållsförteckningen är tyvärr ej helt utan fel, vilket är så mycket mer beklagligt som originalreferensen endast kan utläsas där och ej av respektive reproduktion. *Lars Melander*

N. F. Newbury, *The Teaching of Chemistry*. Second Edition, Heinemann, London 1958, Pp. 294, 21 s.

Den besvärande bristen på kemilärare har givit anledning till denna bok, som är avsedd dels för yngre lärare i skolor av skilda slag, dels för handledare i läroverk där olika metodik och principer prövas. Den vill även ge uppslag till utrustning och skötsel av skolornas kemiska institution och förslag till elevers enskilda arbeten.

Efter en kort redogörelse för kemiens utveckling och skiftande nutida betydelse diskuteras olika metoder för dess införande i skolan,

orienteringskurser och kurser för yngre och äldre elever, undervisning i elementär kemi samt organiserande och vård av laboratorier. En intressant jämförelse göres mellan elevers experimentella arbetsmetod och lärarens demonstrationsmetod, varjämte behandlas kvantitativa laborationer, även med användning av apparatur i lillskala. Kemiska teoriers införande, språkliga uttryck, definitioner och termer samt användning av diagram, kartor och annan åskådningsmateriel diskuteras, likaså träning i experimentell teknik. Slutligen behandlas kursens samband med andra vetenskaper och med lokala förhållanden i samhället, elevers hobbyarbeten, deras kemiska utställningar och klubbar samt besök i industriella anläggningar, varefter den mångsidiga framställningen avslutas med rikliga litteraturanvisningar.

Man finner i boken en grundlig redogörelse för de svårigheter som kunna möta den oerfarne läraren och hur de kunna bemästras, hur lektioner kunna komponeras så, att elevernas skiftande intresseområden beaktas, hur varierande typer av frågeskrivningar kunna uppställas, hur man lämpligen förfar vid rättande av laborationsredogörelser ävensom hur god laboratoriedisciplin kan uppehållas.

Författarens entusiastiska framställning, belyst av föredömliga illustrationer, gör att man läser boken med oavbrutet intresse. Den överflödar av uppslag av vilka åtskilliga ännu torde vara oprövade hos oss, och för äldre lärare och provårshandledare är den en uppfriskande stimulans som ger vidgade utblickar. Boken förtjänar att noga studeras och ofta begrundas. *E. Nordefeldt*

Berättelse över 3:e Nordiska kongressen LMFK i Stockholm och Uppsala den 4—9 augusti 1957, Stockholm 1958, 184 s., kr. 4:—. — Boken kan rekvireras från Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, adjunkt Jakob Isander, Börjessonsvägen 50, Bromma, postgiro 858 25.

Elementas läsare kunde redan i septemberhäftet 1957 ta del av ett kortare referat från den tredje nordiska kongressen LMFK. Den fullständiga kongressberättelsen föreligger nu, redigerad av kongressens sekreterare, lektor Bror Gustaver. De olika föreläsarna publicerar här utförliga referat av sina föredrag och diskussionsinledningar; däremot har av utrymmesskäl alla diskussionsinlägg måst utgå. I en rad artiklar behandlas sålunda matematikens, fysikens och kemins ställning i enhetsskola och gymnasium, betraktad ur såväl universitetens och tekniska högskolornas som industriens synpunkt. I andra inlägg behandlas aktuella skolproblem i Danmark och Finland. En del artiklar är ägnade åt rent metodiska problem, t. ex. funktionsläran och den moderna fysiken i det svenska gymnasiet. För kemister finns att läsa

Forts. sid. 156

Problemavdelning[1]

Matematiska uppgifter

2206) *I en följd av (2n+1) konsekutiva hela tal är summan av de (n+1) första talens kvadrater lika med summan av de n återstående kvadrater. Bestäm första talet i följden.* *X.*

2207) *I triangeln ABC är sidan BC given till längd och läge. Medianen mot BC och ytterbisektrisen till vinkeln A är lika långa. Sök orten för punkten A.* *V. Thébault*

2208) *I en cirkel (O; R) är AB en diameter och n en normal till AB. Dessa element är givna. En variabel linje genom A, som skär cirkeln på nytt i P, råkar n i S, så att dess normal i denna punkt skär cirkeln i Q (och Q_1). Sök orten för mittpunkten av kordan PQ.*
Journal de mathématiques élémentaires

Enklare matematiska uppgifter[2]

2209) Rötterna till ekvationen $ax^2+bx-a=0$ är x_1 och x_2. Visa, att $(x_1^2+1)/x_1+(x_2^2+1)/x_2=0$; $a\neq 0$.

2210) Uppdela $(1-x^2)(1-y^2)-4xy$ i faktorer.
Svar: $(1-xy+x+y)(1-xy-x-y)$.

2211) I två likformiga trianglar ABC och $A_1B_1C_1$ är $a+b_1=12$, $a_1+b=13$ och $a+b=15$. Bestäm längdskalan.
Svar: $a:a_1=3:2$.

2212) En cirkelsektors medelpunktsvinkel är 90°. En rektangel med två hörn på bågen är inskriven i sektorn. Visa, att förhållandet mellan rektangelsidorna är 1 : 2, om diagonalen och radien är lika långa.

2213) En triangels sidor är 56 cm, 39 cm och 35 cm. Visa, att den största vinkeln är exakt 60° mer än den minsta.

2214) En punkts avstånd till räta linjen $y=x$ är medelproportional till avstånden till koordinataxlarna. Sök orten för punkten.
Svar: Räta linjerna $y=(2\pm\sqrt{3})x$.

2215) En rörlig korda i parabeln $y^2=4ax$ har den konstanta projektionen $2l$ på styrlinjen. Sök orten för kordans mittpunkt; visa, att kordan tangerar denna ort samt att den avskär ett segment med konstant yta av den givna parabeln.
Svar: Parabeln $y^2+l^2=4ax$.

2216) I en likbent triangel med given sida och varierande bas inskrives en kvadrat, så att två hörn faller på basen. Bestäm triangelns toppvinkel så, att kvadratens sida blir så stor som möjligt.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Banérgat. 33, Stockholm Ö.
[2] Uppg. 2209, 2213—2217 är insända av *S.B.*, uppg. 2210—2212, 2218 av *X.*

Svar: 76,88° ($\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = 1:\sqrt[3]{2}$).

2217) Parablerna $y=-x^2+6x-5$ och $y=x^2-6x+11$ skär y-axeln i A, resp. B. Kurvorna råkas i en punkt P med abskissan 2. Beräkna ytan APB.

Svar: $13\frac{1}{3}$ ytenh.

2218) Två klot tangerar varandra i punkten O. Avståndet mellan deras medelpunkter är a. Ett mot centrallinjen vinkelrätt plan, som skär kloten, lägges på avståndet b från O. Bestäm den volym, som från O räknat inneslutes av kloten och planet.

Svar: πab^2 volymsenh. — Man får $v=\int_0^b 2\pi ax\,dx$. Samma resultat erhålles, om kloten skär varandra i planet p och b är avståndet mellan p och ovannämnda plan.

Lösningar till uppg. 2179—2180

2179) *Från en punkt P drages tangenterna till en hyperbel. De med asymptoterna parallella linjerna genom P skär kurvan i A och B. Visa, att normalerna till PA och PB i A och B råkas på mittpunktsnormalen till tangentkordan.* V. *Thébault*

Om PA och PB skär tangentkordan i A_1 och B_1, så är enligt polarteorin A och B mittpunkter på PA_1 respektive PB_1 och således AB parallell med A_1B_1. Diametern genom P halverar därför utom tangentkordan även AB och således även A_1B_1. De tre normalerna råkas slutligen i centrum till cirkeln PA_1B_1. *X.*

2180) *En cirkel med centrum O och en punkt A ej belägen på cirkeln eller i O är givna. Finnes en punkt B, för vilken förhållandet $PA^2:PB\cdot PQ$ är konstant, när kordan PQ (eventuellt förlängd) vrider sig kring B?* *X.*

1. Av symmetriskäl ligger B på diametern genom A, som väljes till x-axel. Vi antar, att radien är 1, och att B ligger inom cirkeln. Läge B utanför eller på cirkeln, skulle det konstanta bråkets nämnare kunna bli noll. Lägg origo i O, A i $(a;\,0)$, där $a>0$, B i $(b;\,0)$, P i $(x;\,y)$. Om man observerar, att $PB\cdot PQ=PB^2+PB\cdot BQ=PB^2+1-b^2$, erhålles $[(x-a)^2+y^2]:[(x-b)^2+y^2+1-b^2]=k$, där k är en konstant. Då $x^2+y^2=1$, fås $a^2+1-2ax=k(2-2bx)$, varav $a=bk$ och $a^2+1=2k$, dvs. $b=2a:(a^2+1)$ och $1-b=(1-a)^2:(a^2+1)>0$, som sig bör. Konstruera en rätvinklig triangel med kateterna 1 och a. Höjden mot hypotenusan projicieras på kateten a. Denna projektion är $a:(a^2+1)$. *S. B.*

2. Vi antar som förut, att cirkelns ekvation är $x^2+y^2=1$ och inför för varje punkt Z i planet tillhörande $z=x+iy$. Med $\bar{z}$ menas $x-iy$.

För en punkt P på cirkeln är $\bar{p}=1:p$. Problemets villkor blir då $[(p-b)(1/p-\bar{b})+1-b\bar{b}]:(p-a)(1/p-a)=k$ eller $(-\bar{b}p^2+2p-b):(-ap^2+(1+a^2)p-a)=k$, varav $\bar{b}:a=2:(1+a^2)=b:a$. Alltså ligger även B på reella axeln och $2:\overline{OB}=1:\overline{OA}+1:\overline{OC}$ (1), då $1:a$ hör till C. Är DE diametern genom A, uppsökes enl. (1) den punkt C, som jämte A delar DE harmoniskt; sedan är enl. (1) B den punkt, som jämte O delar AC harmoniskt. *X.*

2181) *Skriv upp alla primtal så beskaffade, att även alla konsekutiva sifferföljder, som ingår i talet, är primtal, varvid 1 räknas som primtal.* *J. Lundström*

De ensiffriga talen med denna egenskap är: 1, 2, 3, 5, 7; de tvåsiffriga 11, 13, 17, 23, 31, 37, 53, 71, 73; de tresiffriga 113, 131, 137, 173, 311, 313, 317, 373 och de fyrsiffriga 1373, 3137. Flera än ovanstående finns ej. Av de fyrsiffriga skulle man kunna vänta sig, att även 3113 och 3173 har den sökta egenskapen, men det första befinnes vara $11\cdot 283$ och det senare $19\cdot 167$. Av femsiffriga tal ligger 31373 närmast till hands, men är $137\cdot 229$. *J. Lundström*

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen

Mars 1959

Matematiska uppgifter[1]

Reallinjens matematiska gren

1. Den räta linjen $x+2y=5$ är normal till kurvan $y=a(1+x^2)$. Bestäm värdet på konstanten a.
2. I en regelbunden tresidig pyramid är vinkeln vid spetsen i en sidoyta lika stor som vinkeln mellan en sidokant och basytan. Bestäm denna vinkel.
3. I den vid A rätvinkliga triangeln ABC är sidan BC parallell med y-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem. Hörnet A ligger i punkten (0; 1) och hörnet B på kurvan $y=x^2$. Bestäm geometriska orten för hörnet C, när B genomlöper den angivna kurvan, och konstruera orten i dess huvuddrag med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter samt asymptoter.
4. En likbent triangel med toppvinkeln 20° är inskriven i en cirkel. En transversal genom cirkelns medelpunkt delar en av triangelns lika stora sidor i förhållandet 3:1 från spetsen räknat. I vilket förhållande delar transversalen den andra av de lika stora sidorna?
5. Undersök funktionen $y=\sin 3x+\sin x$ med avseende på maxima och minima, samt upprita motsvarande kurva i dess huvuddrag.

[1] Enligt gymnasiereformen av år 1953, som tillämpas vid studentexamen fr. o. m. v. t. 1957.

Beräkna därefter ytan av det område, som begränsas av x-axeln och kurvan för $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$.

6. Funktionen $I=F(T)$ definieras genom ekvationen $I=aT^2 \cdot e^{-b/T}$, där a och b är konstanter och $a>0$. Genom sambanden

$$x=\frac{10^4}{T}, \quad y={}^{10}\log I - 2 \cdot {}^{10}\log T$$

införes variablerna x och y i stället för T och I. Den på detta sätt erhållna funktionen $y=f(x)$ representeras grafiskt av en rät linje. Beräkna dennas riktningskoefficient, om $a=60{,}2$ och $F(2000)=0{,}0010$.

7. Ekvationen $x^2(1-a)+y^2(1+a)-1=0$, där a är ett reellt tal, som kan anta olika värden, betyder ett kägelsnitt i ett rätvinkligt koordinatsystem. Undersök, hur kägelsnittets art och dess symmetriaxlars lägen beror av a. Därvid skall för en ellips anges läget av storaxeln och för en hyperbel läget av transversalaxeln. Slutligen skall genom schematiskt uppritade diagram lämnas en översikt av hur kägelsnittet varierar, när a genomlöper alla reella värden.

8. Undersök utseendet av kurvan $y=x^3+ax+b$ för olika reella värden på konstanterna a och b. Bevisa därefter med ledning av denna undersökning, att om ekvationen $x^3+ax+b=0$ har tre olika reella rötter, så gäller olikheten $4a^3+27b^2<0$. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att man bevisar omvändningen av föregående sats, dvs. om $4a^3+27b^2<0$, så har ekvationen $x^3+ax+b=0$ tre olika reella rötter.

Resultat: **1.** $a_1=1{,}5$; $a_2=1$.. **2.** 56,73°. **3.** $y=1:(1-x^2)$ med min. i $A(0;\ 1)$; den till minimet hörande triangeln ABC är urartad. Asymptoter: $x=\pm 1$ och $y=0$. **4.** I förh. 0,6468 : 1 från spetsen räknat. **5.** Period 2π; symmetri- och infl.pkter $(n\pi;\ 0)$; sym.axlar $x=\frac{1}{2}\pi+n\pi$. Tillräckligt att undersöka området $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$. Max. i $[\frac{1}{2}\pi \pm 0{,}9554+2n\pi;\ \frac{8}{9}\sqrt{3}]$ och i $[-\frac{1}{2}\pi+2n\pi;\ 0]$; min. i $[-\frac{1}{2}\pi \pm 0{,}9554+2n\pi;\ -\frac{8}{9}\sqrt{3}]$ och i $[\frac{1}{2}\pi+2n\pi;\ 0]$. Ytan är $\frac{4}{3}$ ytenh. **6.** −2,276. **7.** Koord.axlarna är sym.-axlar. Kägelsnitten går genom de fyra punkterna $[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2};\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}]$. 1. $a=0$: cirkel. 2. $0<a<1$: ellips med storaxeln på x-axeln. 3. $a=1$: linjeparet $y^2=0{,}5$. 4. $a>1$: hyperbel med transv.ax. på y-axeln. 5. $a \to +\infty$: hyperbeln tenderar mot linjeparet $x^2-y^2=0$. Teckenbyte på a, som medför 90° vridning kring origo, ger övriga typer. **8.** En med x-axeln parallell linje kan ej skära kurvan $y=x^3+ax$ i tre distinkta punkter med mindre än att $a<0$. I så fall har y ett (pos.) max. och ett (neg.) min., vilkas gemensamma kvadrat är $-4a^3:27$. Ekv. $x^3+ax+b=0$ har då tre olika reella rötter, om, och endast om, $(-b)^2<-4a^3:27$, dvs. $4a^3+27b^2<0$. Som detta villkor inkluderar $a<0$, är det både nödvändigt och tillräckligt.

Reallinjens biologiska gren

1. Funktionen x^3+4x^2-3x+a har ett maximum, som har värdet 6. Bestäm konstanten a.
2. Det ovanför x-axeln belägna segmentet av parabeln $y=1-x^2$ roterar kring x-axeln. Bestäm volymen av den därvid uppkomna kroppen.
3. En konvergent oändlig geometrisk series summa är 2. Bestäm seriens tredje term y som funktion av kvoten x, och åskådliggör denna funktion grafiskt med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter. Funktionens definitionsområde måste beaktas.
4. I en regelbunden tresidig pyramid är vinkeln mellan en sidokant och basytan och vinkeln mellan en sidoyta och basytan komplementvinklar. Beräkna vinkeln mellan två sidoytor.
5. I fyrhörningen *ABCD* är sidorna *AB*, *BC*, *CD* och *DA* respektive 6 cm, 9 cm, 4 cm och 3 cm. Vinkeln A är dubbelt så stor som vinkeln C. Beräkna fyrhörningens yta i de båda fall, som är möjliga. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att det exakta värdet av ytan anges.
6. Upprita kurvorna $y=e^{-x}$ och $y={}^e\log x$ i samma koordinatsystem, och bestäm med ledning av diagrammet approximativt lösningen till ekvationen $e^{-x}={}^e\log x$. Bestäm därefter, medelst ett förstorat diagram eller på annat sätt, lösningen med två säkra decimaler.
7. Ett regelbundet tresidigt prisma är inskrivet i en viss sfär. Det största värde, som prismats volym kan anta, är 1 dm^3. Beräkna sfärens radie.
8. En funktion $f(x)$ är ett polynom av tredje graden. Vidare är $f(-1)=16$ ett maximum, $f(0)=11$ samt $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f'(1+\triangle x)-f'(1)}{\triangle x}=0$. Bestäm funktionen, och upprita den motsvarande kurvan i dess huvuddrag.

Resultat: **1.** $a=-12$. **2.** $\frac{16}{15}\pi$ vol.enh. **3.** $y=2(x^2-x^3)$ med det för kvoten x gällande villkoret $-1<x<1$; inom detta område finns ett min. i (0; 0) och ett max. i $(\frac{2}{3}; \frac{8}{27})$. Då x går mot -1, går y *mot* 4, och då x går mot $+1$, går y *mot* 0. Min.p. medtages, om man anser att en geom. serie kan ha kvoten 0, om inte uteslutes den. **4.** 90°. — Resultatet fås omedelbart av satsen: Om en linje är vinkelrät mot två linjer i ett plan, är den vinkelrät mot varje linje i planet. **5.** $10\sqrt{5}$(=22,36) cm^2 eller $16\sqrt{2}$(=22,63) cm^2. **6.** 1,31. **7.** 1 dm. **8.** $y=f(x)=x^3-3x^2-9x+11$ med max. i (−1; 16) och min. i (3; −16).

Allmänna linjens sociala gren

1. I tre lika stora cirklar är radien en längdenhet. I den första inskrives en liksidig triangel, i den andra en kvadrat och i den tredje en regelbunden sexhörning. Hur förhåller sig ytorna av triangeln, kvadraten och sexhörningen till varandra? Svaret skall anges i såväl exakt som approximativ form.
5. En person A antas under 45 år ha en årlig inkomst av 10 000 kr. En annan person B antas under de fem första av de nämnda åren helt sakna inkomst men under de senare 40 åren ha en större årlig inkomst än A. Hur stor skall denna B:s inkomst vara, för att de båda personerna skall kunna anses vara likställda i inkomsthänseende under den nämnda 45-årsperioden? Den årliga inkomsten tänkes inflyta på en gång vid årets slut, och ränta på ränta beräknas efter $4\frac{1}{2}$ %.
8. En funktion $f(x)$ är ett polynom av tredje graden. Vidare är $f(0)=4$ ett maximum, $f(-1)=0$ samt $\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(1+\triangle x)-f(1)}{\triangle x} = -3$. Bestäm funktionen, och upprita den motsvarande kurvan i dess huvuddrag.

Uppg. 2, 3, 4, 6, 7 se biol. gren 1, 2, 3, 4, 6.

Resultat: 1. $1 : \frac{8}{9}\sqrt{3} : 2$; approximativt $1 : 1{,}540 : 2$. 5. 12 980 kr.
8. $f(x)=x^3-3x^2+4$ med min. i (2; 0) och max. i (0; 4).

Matematiska uppg. för latin- och realgymnasiet

Enl. 1933 års stadga

Latingymnasiet

1. I en geometrisk serie med olika termer är tredje termen 4 och summan av fjärde och femte termen 8. Vilken är serien?
2. I två lika stora cirklar är radien en längdenhet. I den första inskrives en liksidig triangel, i den andra en kvadrat. Hur förhåller sig dessa figurers omkretsar till varandra, och hur förhåller sig deras ytor? De sökta förhållandena skall anges såväl i förenklad exakt form som approximativt.
3. Bestäm medelst grafisk metod eller på annat sätt, när funktionen $6+x-2x^2$ är negativ.
4. Från en flottstation, belägen på en ö, avgick vid ett tillfälle samtidigt två fartyg, *A* och *B*. Det förra hade dubbelt så stor hastighet som det senare. Båda fartygen höll rätlinig kurs, *A* med kursriktningen O 15° N och *B* med kursriktningen S 15° V. Efter en viss tid bestämdes den riktning, i vilken fartyget *A* syntes från *B*. Vilken var denna riktning, om avståndet mellan fartygen antas

vara så stort, att deras egen utsträckning kan försummas i förhållande till deras avstånd? Ingen hänsyn tas till jordytans krökning.

5. I triangeln ABC är sidan AC 5 cm, och sidan BC 10 cm och vinkeln C 90°. Från en punkt D på sidan BC drages normalen till BC. Den råkar AB i punkten E, som sammanbindes med mittpunkten F på sträckan CD. Bestäm grafiskt eller på annat sätt det minsta värde, som ytan av den på sträckan EF uppritade kvadraten kan anta.
6. Se social gren 5.
7. En halvcirkel uppritas med en sträcka AB som diameter. Punkten C väljes godtyckligt på AB. Med sträckorna AC och CB som diametrar uppritas halvcirklar på samma sida om AB som den förra halvcirkeln. Genom C drages normalen till AB. Den råkar den först uppritade halvcirkeln i punkten D. Med sträckan CD som diameter uppritas en cirkel. Bevisa, att denna cirkels yta är lika med ytan av den figur, som begränsas av cirkelbågarna AB, BC och CA. (Denna sats var känd redan av Arkimedes.)
8. I en given spetsvinklig triangel ABC, där sidorna betecknas på vedertaget sätt, råkar höjden från hörnet C den motstående sidan i punkten D. Bisektrisen till vinkeln A skär höjden CD i punkten E. Bestäm förhållandet mellan sträckan DE och den i triangeln inskrivna cirkelns radie, uttryckt i triangelns sidor. Ange speciellt, för vilka trianglar detta förhållande antar värdet 1.

Resultat: **1.** 1, −2, 4, −8, ... **2.** Förh. är mellan omkretsarna $\frac{3}{8}\sqrt{6}=0{,}9186$ och mellan ytorna $\frac{3}{8}\sqrt{3}=0{,}6495$. **3.** För $x<-1{,}5$ och $x>2$. **4.** O 34,1° N. **5.** 12,5 cm² **8.** $(b^2+c^2-a^2):c(b+c-a)$; förh. är 1, då $a=b$.

Realgymnasiet. Allmän kurs

5. Två sidor i en triangel har ekvationerna $x=3$ och $x-2y+4=0$. Den tredje sidan eller dess förlängning går genom origo. Bestäm denna sidas ekvation, då triangelns yta är 12,5 ytenheter.
8. En regelbunden sexhörning med sidan a är given. På den mellersta tredjedelen av varje sida uppritas utåt en liksidig triangel, varigenom en 24-hörning uppstår. På den mellersta tredjedelen av var och en av 24-hörningens sidor uppritas utåt en liksidig triangel, varigenom en 96-hörning uppstår, osv. i oändlighet. Undersök, om dessa månghörningars omkretsar och ytor går mot ändliga och bestämda gränsvärden, när sidoantalet växer obegränsat.

Uppg. 1, 2, 3, 4, 6, 7 se biol. gren 1, 3, 4, 5, 7, 8.

Resultat: 5. $x=18y$; $x=-2y$; $9x=2y$; $11x=18y$. 8. Omkretsen växer över alla gränser; ytan har gränsvärdet $1{,}8a^2\sqrt{3}$.

Realgymnasiet. Specialkurs

1. Kurvan $y=x^3+ax^2+bx+c$ har inflexionspunkten $(-1;\ 0)$. Vinkeln, räknad i positiv led, mellan positiva x-axeln och kurvans tangent i nämnda punkt är 135°. Bestäm konstanterna a, b och c, samt upprita kurvan i dess huvuddrag.
2. Upprita kurvorna $9x^2+16y^2-144=0$ och $45x^2-180x+4y^2=0$ i deras huvuddrag. Bestäm därefter ekvationerna för deras gemensamma tangenter.
3. Undersök kurvan $y=\operatorname{tg} x+\operatorname{cot} x$ med avseende på maximi- och minimipunkter samt asymptoter. Konstruera därefter kurvan i dess huvuddrag.
4. I en triangel är en sida bestämd till storlek och läge, och förhållandet mellan medianerna till triangelns övriga sidor är 2. Bestäm orten för det hörn i triangeln, som står mot den förstnämnda sidan.
5. Ett regelbundet tresidigt prisma har konstant total begränsningsyta. Bestäm förhållandet mellan sidokanten och baskanten, när den kring prismat omskrivna sfären är så liten som möjligt.
6. En hyperbels brännpunkter är F och F'. En godtycklig tangent till kurvan råkar vertextangenterna i punkterna P och P' samt transversalaxeln i punkten R. Bevisa, att $RF\cdot RF'=RP\cdot RP'$.
7. Två parallella räta linjer med riktningskoefficienten (vinkelkoefficienten) k tangerar var sin av parablerna $y^2=2x$ och $(y+3)^2+2x=0$. Bestäm avståndet z mellan linjerna som funktion av k, undersök denna funktion med avseende på maxima och minima, samt åskådliggör den grafiskt i stora drag.

Resultat: **1.** $a=3$, $b=2$, $c=0$. Max. i $(-1-\frac{1}{3}\sqrt{3};\ \frac{2}{9}\sqrt{3})$, min. i $(-1+\frac{1}{3}\sqrt{3};\ -\frac{2}{9}\sqrt{3})$. **2.** $x=4$, $y=\pm(x+5)$. **3.** Man finner $y=2:\sin 2x$ med asymptoterna $x=\frac{1}{2}n\pi$. Min. i $(\frac{1}{4}\pi+n\pi;\ 2)$ och max. i $(\frac{3}{4}\pi+n\pi;\ -2)$. **4.** Om den givna sidans ändpunkter har koord. $(\pm\frac{1}{2}a;\ 0)$ och dess mittp. normal är y-axel, blir orten de två cirkellinjerna $y^2+(x\pm 2{,}5a)^2-\frac{1}{4}a^2=0$, dock med undantag av skärningspunkterna med x-axeln. **5.** $(\sqrt{51}-\sqrt{3}):6$. **6.** Om tangenten skär y-axeln i S, ger enkel räkning att $SP=SF$. Då $SP=SP'$ *och* $SF=SF'$ kan alltså en cirkel läggas genom P, P', F, F' osv. **7.** $z=|1+3k|:\sqrt{k^2+k^4}$. När k går från $-\infty$ till $-\frac{1}{3}$, går z från 0 över max. $=\sqrt{2}$ (för $k=-1$) till 0. När k går från $-\frac{1}{3}$ till $+\infty$, går z mot ∞ (för $k=0$) för att sedan asymptotiskt avta till 0.

Uppgifter i fysik

1. I en likströmsmotor går 15 % av den tillförda elektriska energin förlorad. Motorn skall driva en hiss, vars tyngd är kompenserad med en motvikt. Vad kostar den elektriska energi, som krävs

för att med denna anordning lyfta en last av 600 kg 12 m? Priset på den elektriska energin är 10 öre per kWh. De förluster, som beror på friktion i hissmaskineriet eller på förändringar i systemets rörelseenergi, kan beräknas sammanlagt uppgå till 20 % av den nyttiga energi motorn avger.

2. Från en punkt på den horisontella marken kastas en kula snett uppåt med en utgångshastighet av 30 m/sek, som bildar vinkeln 45° med horisontalplanet. I sin bana passerar kulan två punkter belägna på samma höjd över markytan och på 10 m avstånd från varandra. Beräkna denna höjd. Vid beräkningen bortses från luftmotståndet.
3. På ett glatt, lutande plan med lutningsvinkeln 30° ligger tre likadana, glatta, homogena, cirkulära cylindrar så, att axlarna är horisontella, och så, att cylindrarnas tyngdpunkter ligger i samma vertikalplan. Varje cylinder väger 4 kg. Den nedersta cylindern stöder dessutom mot en glatt vertikal vägg parallell med cylinderns axel. Beräkna de krafter, varmed denna cylinder påverkar de båda planen. Figur, återgivande kraftsituationen, krävs. Det skall klart framgå, på vilka kroppar de utritade krafterna verkar.
4. På en optisk bänk är uppställda ett lysande föremål, en tunn positiv lins och en skärm. På skärmen uppfångas en tydlig bild av det lysande föremålet. Tätt intill linsen inskjutes sedan en tunn negativ lins så, att linsernas huvudaxlar sammanfaller. Skärmen måste då flyttas 96 cm, för att en tydlig bild av föremålet åter skall erhållas på skärmen. Bildens lineära storlek är i detta fall 5,0 gånger så stor som i förra fallet. Beräkna den negativa linsens brännvidd. Figur med strålgång krävs.
5. Ett skjutmotstånd är påstämplat »50 ohm 5 A», vilket bl. a. betyder, att det vid kontinuerlig belastning ej bör genomlöpas av starkare ström än 5 A. Dess ändpunkter anslutes till en spänningskälla för likström på 150 V. Mellan motståndets ena ändpunkt och dess glidkontakt inkopplas en ledning med resistansen 15 ohm. Hur hög får strömstyrkan genom denna ledning högst vara, om skjutmotståndet ej skall överbelastas? Kopplingsschema erfordras.
6. Mellan punkterna *A* och *B* parallellkopplades ett motstånd på 3,00 ohm, en knallgascoulometer med obekant resistans samt en voltmeter med mycket stor resistans. *A* förenades med en strömkällas ena pol och *B* via en amperemeter, ett regleringsmotstånd och en strömbrytare med den andra. Omedelbart efter det strömmen slutits, visade voltmetern 9,00 V och amperemetern 4,50 A. Efter en stund hade strömmen minskat, men man ändrade då inställningen av regleringsmotståndet, så att amperemetern åter visade 4,50 A. Voltmeterns utslag ökade då till 9,48 V. Vad kommer

voltmetern att visa omedelbart efter det strömmen i huvudledningen brutits? Kopplingsschema erfordras.

7. En spole utan järnkärna seriekopplas med ett motstånd med varierbar resistans samt ett ackumulatorbatteri, så att en sluten strömkrets erhålles. Parallellt med spolen kopplas ett induktionsfritt motstånd. Det reglerbara motståndet inställes så, att strömstyrkan i spolen blir 1,2 A. Sedan utbytes batteriet mot sekundärlindningen till en transformator, vars primärlindning är ansluten till en växelströmskälla. Det reglerbara motståndet inställes nu så, att strömmen genom det induktionsfria motståndet blir lika stark som i det förra fallet. Strömmen genom spolen blir då 0,70 A. Bestäm fasförskjutningen mellan ström och spänning i spolen. Kopplingsschema erfordras.
8. Neutroner (^{1}n), som rör sig med mycket låg hastighet, får träffa ett paraffinblock. När en neutron därvid infångas av en väteatom (^{1}H) under bildning av en tung väteatom (^{2}H), frigöres energimängden 2,23 MeV i form av gammastrålning. Beräkna neutronens atomvikt, då den lätta väteisotopen har atomvikten 1,00814 och den tunga väteisotopen atomvikten 2,01474. En kilogramatom innehåller $6{,}02 \cdot 10^{26}$ atomer. Energienheten 1 MeV är lika med $1{,}602 \cdot 10^{-13}$ joule. Mot en utstrålad energi av E joule svarar enligt relativitetsteorin en massminskning av E/c^2 kilogram, där $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/sek.

Resultat: **1.** 0,3 öre. **2.** 23 m. **3.** Bägge 7 kp (exakt $4\sqrt{3}$). **4.** −30 cm. **5.** 3,3 A. **6.** Voltmetern kommer att visa *skillnaden* mellan 9,48 V och 9,00 V, dvs. 0,48 V. Uppgifterna om 3 ohm och 4,5 ampere är överflödiga, som man lätt övertygar sig om genom att införa bokstavsbeteckningar för dessa storheter. — Utan räkning löses problemet, om man tillämpar den tankegång (superpositionsprincipen) som ligger till grund för Thévenins sats; se Elementa *37*, 256, 1954 och *38*, 42, 1955. **7.** 54°. **8.** 1,00899.

Realexamen och praktisk realexamen v. t. 1959

I. Provräkning i realexamen[1].

1. Lös ekvationen

$$\frac{9}{12+8x}+\frac{7}{18-12x}-\frac{29-3x}{27-12x^2}=0$$

[1] För provräkningarna I—IV gäller: Om ett svar skall uttryckas i viss sort, skall det anges uträknat som ett approximativt värde (närmevärde), alltså t. ex. utan kvadratrötter.

2. En person, som ägde några 4 % obligationer, var och en å nominellt 500 kr och med ränteterminer den 15 januari och den 15 juli, skulle den 25 oktober utbetala 3000 kr. För att anskaffa denna summa sålde han sistnämnda dag 5 av obligationerna till en kurs av 102 %. Hur mycket fattades sedan i det erforderliga beloppet?
3. En cirkels periferi delas i 9 lika stora delar. Delningspunkterna kallas i ordning A, B, C, D, E, F, G, H och I. Kordorna AD, AF och DF drages. Hur stora är vinklarna i triangeln ADF?
4. En schweizisk köpman köpte en vara från Sverige. Försäljningspriset fastställde han till samma belopp i schweizerfrancs, som inköpspriset uppgick till i svenska kronor. Hur många procents pålägg motsvarade detta, då kursen var 100 svenska kronor = = 80 schweizerfrancs?
5. I en cirkelsektor ABC inskrives en cirkel, så att den tangerar sektorns båge BC och de båda radierna AB och AC. Den inskrivna cirkeln, vars radie är 1 cm, har sin medelpunkt i O; OA är 2 cm. Beräkna sektorns yta. Som värde på π användes 3,14.
6. Hur lång vägsträcka behöver en bil A med hastigheten 100 km/tim för att köra om en annan bil B, vars hastighet är 80 km/tim? Omkörningen beräknas börja, när A är 50 m bakom B, och sluta när A är 50 m framför B. Ingen hänsyn tas till bilarnas längd och till att bilen A måste svänga ut vid omkörningen och därigenom avvika från den kortaste banan.
7. En cylindrisk cistern med 22 m³ rymd skall gjutas av betong. Den inre höjden skall vara 1,75 m, väggarnas och bottnens tjocklek 10 cm. Hur många säckar cement åtgår till gjutningen, om man beräknar, att 25 % av gjutmassan är cement och en säck cement rymmer 30 dm³? Som värde på π användes $3\frac{1}{7}$.
8. AB är diameter i en cirkel, och C är en punkt på periferien, så belägen att kordan AC är 9 cm. Genom B drages en rät linje parallellt med AC. Den skär tangenten genom A i punkten D; BD är 16 cm. Beräkna kordan CB.

Resultat: **1.** $x=0{,}5$. **2.** 422,22 kr. **3.** Vinklarna vid A, F och D är resp. 40°, 60°, 80°. **4.** 25 %. **5.** 4,71 cm². **6.** 500 m. **7.** 31 säckar. **8.** 7,94 cm.

II. Provräkning i realexamen, avkortad kurs

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 4{,}2x+1{,}8y=3{,}9 \\ 3{,}5x-1{,}2y=0{,}55 \end{cases}$
2. En person köpte en arbetshäst för 3000 kr och sålde den samma dag. Som betalning erhöll han en 4 månaders växel på 3300 kr,

som han diskonterade samma dag efter 6 %. Hur många procent utgjorde hans vinst på affären?

4. En schweizisk köpman köpte en vara från Sverige för 400 svenska kronor. Han sålde den i Schweiz för 400 schweizerfrancs. Hur många procents pålägg motsvarade detta, då kursen var 100 svenska kronor = 80 schweizerfrancs?
5. Undersök, om värdet $x=0{,}1$ satisfierar ekvationen

$$(1-2x+3x^2)^2=x^2(10+9x^2)+12(0{,}08-x^3).$$

6. En person har under två på varandra följande år förlorat 10 % av sitt kapital vid årets början. Med hur många procent bör han öka sitt kapital under det tredje året för att ta igen förlusterna under de båda föregående?
7. Man vill lägga nytt golv i ett rum, som är $4\frac{1}{2}$ m långt och 4 m brett. Hur många plankor av 4 m längd, 5 tums bredd och $1\frac{1}{2}$ tums tjocklek åtgår härtill, och vad kostar virket efter ett pris av 7 kr 50 öre per kubikfot? 1 m = $3\frac{1}{3}$ fot, 1 fot = 12 tum.

Uppg. 3 och 8 utgjordes av uppg. 2 och 6 i provräkning I.

Resultat: 1. $x=0{,}5$; $y=1$. 2. 7,8 %. 4. 25 %. 5. Nej; vänstra ledet = =0,6889, högra ledet = 1,0489. 6. 23,46 %. 7. 36 st.; 187,50 kr.

III. Provräkning för huslig linje

Uppg. 3, 4, 6 i provräkning I och 1, 2, 3, 6, 7, i provräkning II. — Av utrymmesskäl har uppg. för handelslinjen ej kunnat medtagas.

IV. Provräkning för maskin-teknisk linje

1. Lös ekvationen $\dfrac{0{,}2x}{0{,}1-0{,}3x}-\dfrac{3x}{3x-1}=\dfrac{4x-2}{3-2x}$

2. Beräkna $\sqrt{\dfrac{65{,}72\sqrt{40{,}8}}{0{,}3245}}$

3. *ABCDEFGHI* är en regelbunden 9-hörning. Diagonalerna *AD*, *AF* och *DF* drages. Hur stora är vinklarna i triangeln *ADF*?
8. Ur en rektangulär plåt med sidorna 12 cm och 16 cm bortskäres i hörnen lika stora kvadrater. Plåtens utskjutande delar vikes upp, så att man får en rätvinklig låda. Ange dennas volym V cm³, uttryckt i kvadratsidans längd x cm. Upprätta därefter en tabell över V för följande värden på x: $x=1$; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5. Upprita med användande av dessa värden ett diagram, som visar sambandet mellan V och x. Bestäm slutligen med ledning av

diagrammet approximativt dels det värde på x, för vilket V blir störst, dels motsvarande värde på V.

Uppg. 4—7 utgjordes av uppg. 5—8 i provräkning I.

Resultat: 1. $x_1=-\frac{1}{2}$; $x_2=-2$. 2. 36,0. 3. Vinklarna vid A, F och D är resp. 40°, 60° och 80°. 8. $V=x(12-2x)(16-2x)$, där $0<x<6$; volymen är störst, 194 cm³, för $x=2{,}3$ cm.

V. Uppgifter i fysik för maskin-teknisk linje

1. Ett 15 cm långt, cylindriskt provrör innehåller så mycket blyhagel att sammanlagda vikten av provröret och haglen är 40 g. Provrörets yttre genomskärningsyta är 4,0 cm². Provröret flyter i lodrät ställning i en vätska, vars täthet är 0,80 g/cm³. Hur högt ovanför vätskeytan befinner sig därvid provrörets övre kant?
2. I en kompressor sammanpressas en luftmassa som före sammanpressningen har volymen 80 l, trycket 1,0 at och temperaturen +17° C. Efter sammanpressningen är volymen 1,5 l och temperaturen +67° C. Hur stort är då gasmassans tryck uttryckt i at?
3. En rak, homogen och jämntjock tråd AB böjes i en punkt C så, att vinkeln ACB blir 120°. Tråden hänges upp i punkten C så, att den är fritt rörlig kring denna punkt. Stycket AC kommer därvid att intaga vågrätt läge. Beräkna längden av CB, då AC är 10 cm. Figur kräves.
4. En järnvägsvagn sätter sig i rörelse med likformigt accelererad rörelse. Under de första 25 sekunderna tillryggalägger vagnen därvid en sträcka på 200 m. Beräkna härav hur stor vagnens hastighet är 25 sekunder efter starten.
5. Vid ett försök med destillation av alkohol fick alkoholångan passera genom en i en blandning av is och vatten nedsänkt kylslinga, där ångan kondenserades och kondensatet avkyldes till +10° C. Därvid smälte en del av isen. Hur mycket is kan beräknas smälta vid ett försök, som gav 200 g destillerad alkohol? Vid beräkningen används följande värden: Alkoholens kokpunkt = +78° C, dess ångbildningsvärme 200 kcal/kg, dess specifika värme 60 kcal/kg · grad.
6. I en vattendestilleringsapparat används elenergi för att uppvärma vatten från +10° C till +100° C och därefter överföra vattnet till ånga av +100° C. Man har funnit, att apparatens verkningsgrad är 60 %. Hur stor är energikostnaden per liter destillerat vatten, då energipriset är 10 öre/kWh? Vattnets ångbildningsvärme är 540 kcal/kg. 1 kWh motsvarar 860 kcal.
7. Hur många glödlampor stämplade »4 V; 2 W» kan man parallellkoppla till polerna av ett batteri, vars emk är 6,0 V och inre resistans

0,40 ohm, så att varje lampa får den spänning den är avsedd för? Kopplingsschema kräves.

8. Till nätspänningen (220 V) anslöts i serie en elapparat, ett fast motstånd *AB* med resistansen 300 ohm samt en amperemeter, vars resistans försummas. Strömstyrkan genom apparaten blev därvid 0,45 A. Man ville öka strömstyrkan genom apparaten och kopplade därför in ett motstånd parallellt med *AB*. Hur stor skall resistansen hos detta motstånd vara för att strömstyrkan genom apparaten skall öka till 0,50 A? Lösningen skall åtföljas av erforderliga kopplingsscheman.

Resultat: **1.** 2,5 cm. **2.** 62,5 at. **3.** 14,1 cm. **5.** 600 g. **6.** 12,2 öre. **7.** 10 st. **8.** 1540 ohm.

VI. Uppgifter i fysik för kemisk-teknisk linje

6. Med en enkel projektionsapparat avbildas ett diapositiv vars format är 6×6 cm på en skärm. Avståndet mellan skärmen och objektivlinsen är 528 cm. Objektivet, som får betraktas som en tunn positiv lins, har brännvidden 16,0 cm. Beräkna avståndet mellan diapositiv och objektiv samt storleken av bildytan på skärmen. Figur kräves.
7. Metalliskt natrium framställs genom elektrolys av smält natriumhydroxid. Hur stark ström behövs för att på detta sätt utvinna 10 kg metalliskt natrium per dygn vid oavbruten drift? Natrium är envärt och dess atomvikt är 23,0. En gramekvivalent av ett ämne transporterar 96 500 As (coulomb).

Uppg. 1—5 och 8 utgjordes av uppg. 1, 2 och 5—8 i V.

Resultat: **6.** 16,5 cm, 3,7 m². **8.** 490 ampere.

VII. Uppgifter i fysik för teleteknisk linje

7. En anläggning tillföres enfas växelström. En inkopplad voltmeter visar 2000 V, en amperemeter 50 A och en wattmeter 90 kW. Beräkna effektfaktorn och fasförskjutningen. Kopplingsschema kräves.
8. Ett relä slår till, då den anlagda spänningen är 24 V. Lindningstrådens längd är 1000 m, antalet lindningsvarv är 10 000. Trådens diameter är 0,1 mm. Specifika resistansen (resistiviteten) är 0,175. Beräkna den magnetomotoriska kraften.

Uppg. 1—6 utgjordes av uppg. 3—8 i V.

Resultat: **7.** Effektfaktor och fasförskjutning resp. 0,90 och 26°. **8.** 10,8 amperevarv.

VIII. Kemi med laboratorieteknik för kemisk-teknisk linje

1. a) Angiv de fyra i naturen allmännast förekommande grundämnena.
   b) Vilka element räknas till ädelgaserna? Angiv deras mest karaktäristiska egenskaper.

c) Vad menas med isotoper?
d) Vad menas med olefiner?

2. Angiv de kemiska formlerna för och redogör för framställningen och användningen av a) väteperoxid, b) natriumhydroxid, c) superfosfat, d) släckt kalk.
3. Redogör för två principiellt olika metoder, enligt vilka anrikning av malmer kan ske.
4. Redogör med angivande av reaktionsformler för generella framställningsmetoder för a) fettsyror, b) etrar, c) ketoner.
5. Vad innebär fetthärdning, och hur utföres den?
6. Hur kan man kemiskt avgöra om en lösning innehåller a) kaliumklorid eller kaliumbromid, b) zinksulfat eller aluminiumsulfat, c) magnesiumnitrat eller kalciumnitrat, d) blynitrat eller silvernitrat?
7. 0,24 g av en blandning av CaO och $CaCO_3$ upphettas tills vikten blir konstant. Viktförlusten vid upphettningen är 0,02 g. Hur många procent CaO och $CaCO_3$ innehöll den ursprungliga blandningen?
8. 5,0 l klorvätegas av 0° C och 760 mm Hg löses i vatten varefter lösningen utspädes till 2 l. Beräkna a) syrans normalitet, b) hur många ml syra som åtgår vid titrering av 21,60 ml 0,12 N natriumhydroxidlösning.
9. 25,0 ml 0,1 N lösning av Na_2CO_3 försättes med kalciumkloridlösning i överskott. Beräkna vikten av den fällning, som bildas.
10. 25,0 ml av en lösning innehållande saltsyra försättes med kaliumjodat, KJO_3, och kaliumjodid, KJ, i överskott. Härvid sker reaktionen

$$KJO_3 + 5\,KJ + 6\,HCL \rightarrow 6\,KCl + 3\,H_2O + 3\,J_2$$

Den vid reaktionen frigjorda joden förbrukar vid titrering 20,0 ml 0,1 N natriumtiosulfatlösning. Beräkna normaliteten för saltsyran. Angiv reaktionsformeln, då natriumtiosulfat och jod reagerar.

Atomvikter:
C=12,0 Ca=40,0 Cl=35,5 J=126,9 K=39,1 Na=23,0 S=32,0

Resultat: **7.** 18,9% $CaCO_3$. **8.** a) 0,112 N, b) 23,2 ml. **9.** 0,125 g. **10.** 0,080 N, ($2\,Na_2S_2O_3 + J_2 \rightarrow 2\,NaJ + Na_2S_4O_6$) eller $2\,S_2O_3^{2-} + J_2 \rightarrow 2\,J^- + S_4O_6^{2-}$.

IX. Beskrivande maskin- och byggnadslära för maskin-teknisk linje

1. Hur mycket förkortas ett 1,5 m långt stålrör, då det belastas, så att tryckspänningen blir 900 kp/cm²? Elasticitetsmodulen är 2 150 000 kp/cm².
2. En motor med 120 mm remskiva har varvtalet 1440 r/m. Motorn skall driva en kallsåg, som har en remskiva med diametern 480

mm, med varvtalet 90 r/m. Nedväxlingen skall ske över en mellanaxel, vars varvtal är 360 r/m. Rita figur och beräkna a) diametrarna på de remskivor, som sitter på mellanaxeln, b) de båda remhastigheterna i m/s.

3. En helsvetsad, 2 m lång cylindrisk behållare med volymen 3 m^3 skall tillverkas av stålplåt. Behållaren skall vara avsedd för 7 kp/cm^2 övertryck. Beräkna erforderlig plåttjocklek, om svetsfogarnas relativa styrka är 0,8 av grundmaterialets. Högsta tillåtna dragspänning i grundmaterialet=800 kp/cm^2.

4. En DIP-stång NP 18 skall användas som pelare. Den kraft, pelaren skall upptaga, ger en tryckspänning av 415 kp/cm^2. Beräkna den största längd, som pelaren får ha, om säkerheten mot knäckning skall vara 4-faldig. Elasticitetsmodulen är 2 150 000 kp/cm^2.

5. I en växellåda ligger de in- och utgående axlarna i rät linje. På vardera av dessa axlar sitter ett kugghjul. På en mellanaxel sitter två kugghjul, som tillsammans med de andra kugghjulen bildar två kuggväxlar. Hjulens kuggantal är från den ingående axeln räknat 40, 80, 24 och 76. Kugghjulen med kuggantalen 40 och 80 har modulen 2,5. a) Beräkna modulen på de andra kugghjulen. b) Beräkna hur många varv den ingående axeln gör, när den utgående gör ett varv.

6. En tryckpump matar en behållare med 10 000 liter vatten per minut. Behållarens övertryck är 10 kp/cm^2 och uppfordringshöjden är 26 m. Beräkna den effekt, som erfordras för att driva pumpen, om verkningsgraden är 0,88 och de totala förlusterna i rörledningar och ventiler motsvarar 19 m vattenpelare.

7. En kolpulvereldad reservkraftstation skall vid behov kunna leverera 6000 kW. Verkningsgraderna är för ångpannan 85 %, för ångturbinen 30 % och för generatorn 90 %. Kolpulvrets värmevärde är 7200 kcal/kg. Beräkna bränsleåtgången per dygn, om 6000 kW kontinuerligt uttages.

8. En 6-cylindrig 4-taktsmotor med direktinsprutning av bränslet utvecklar 60 hk vid 2500 r/m. Beräkna hur många g bränsle, som pumpen under insugningstakten levererar till varje cylinder, om motorns totala verkningsgrad är 0,25 och bränslets värmevärde 10 000 kcal/kg.

Resultat: 1. 0,63 mm. 2. a) 480 mm och 120 mm b) 9,05 m/sek och 2,26 m/sek. 3. 8 mm. 4. 5,1 m. 5. a) 3 mm b) $6\frac{1}{3}$ varv. 6. 366 hk. 7. 75 ton/dygn. 8. 0,0339 g.

Forts. från sid. 139

om bl. a. vattenföroreningar och nya läkemedel. Värdefulla för en lärare är beskrivningarna av de demonstrationer i fysik och kemi, som utfördes under kongressdagarna. Där kan vissa uppslag till nya lektionsexperiment hämtas. Tilläggas kan, att boken också ger en fyllig beskrivning av kongressens yttre ram, öppningshögtidligheten, fester och utfärder samt kongressresan, och därför utgör en god reklam för den fjärde nordiska kongressen, som kommer att anordnas i Oslo sommaren 1960. *Olof Eklöf*

Kosmos. Fysiska uppsatser utgivna av Svenska Fysikersamfundet. Bd *36,* 1958, 193 s. Priset är för medlemmar av Fysikersamfundet kr. 14: — (jämte porto) för *inbundet* ex; bokhandelspriset är kr. 14: — för *häftat* ex. Medlemskap anmäles till docent Sven Lennander, Seminarieg. 29, Växjö.

I det föreliggande bandet av Kosmos ägnas ämnet för årets nobelpris i fysik, čerenkovstrålningen, en instruktiv och klarläggande behandling av docent Gösta Ekspong. Uppsatsen behandlar såväl strålningens natur som de instrument, som kommit till användning vid undersökning av strålningen.

Bubbelkammaren, som tydligen har visat sig vara en synnerligen värdefull kärnfysikalisk detektor för undersökning av högenergetiska partiklar, beskrives i en uppsats av professor Hilding Slätis.

Det stora intresse, som under det geofysiska året knutits till artificiella satelliter, har satt spår i Kosmos i form av två uppsatser, en av civilingenjör Åke Hjertstrand om raketmotorer och raketdrivmedel, samt en av civilingenjör Rolf Moore om prediktion av stråklägen och passagetider för atmosfäriska satelliter.

Till de värdefulla uppsatser om reaktorer, som publicerats i Kosmos, kommer i år professor Nils Svartholms bidrag om forskningsreaktorer. Dessutom innehåller det föreliggande bandet en uppsats av fil. dr Karl-Erik Larsson om värmerörelser i fasta och flytande kroppar och en av fil. lic. Ingvar Lindgren om molekylstråleresonans.

Att närmare presentera någon av uppsatserna i årets Kosmos är omöjligt inom ramen för denna anmälan. Som fysiklärare känner man emellertid en oförställd tacksamhet för det gedigna stoff, som genom boken förmedlats från fackmän inom skilda högaktuella områden. *Arvid Ljunghall*

MKVIST - BESKOW m. fl.

ysik för realgymnasiet

1. **Mekanik** av *Göran Beskow* G 4:50

»Denna lärobok i mekanik är mycket väl genomarbetad... Enheter i olika måttsystem används omväxlande, men de hålls isär på ett klart och redigt sätt. Framställningen är lättläst och kompletteras med ett stort antal fotnoter.»

Teknisk Tidskrift

2. **Värmelära** av *Ernst Herlin* G 4:80

»Man har fått en bok som det bör vara lätt att undervisa efter och lätt att hämta kunskaper ur.»

Torbjörn Ljunggren i TfSL

3. **Elektricitetslära** av *Ernst Knave* G 7:75

»En mycket värdefull lärobok, som med föredömlig klarhet och reda behandlar elektricitetslärans problem.»

Helge Stolt i utlåtande till Läroboksnämnden

4. **Optik** av *Gunnar Almkvist* Utkommer ht 59

5. **Mekanik** av *Göran Beskow* Under arbete

knytning till serien föreligger även:

Astronomi av *Conrad Lönnqvist* G 4:20

»Med sin kända populariseringsförmåga har förf. lyckats klarlägga astronomiens grunder på ett så intresseväckande sätt, att arbetet icke endast utgör en förträfflig lärobok utan även en populärvetenskaplig avhandling, som på det bästa kan rekommenderas i allmänhetens hågkomst.»

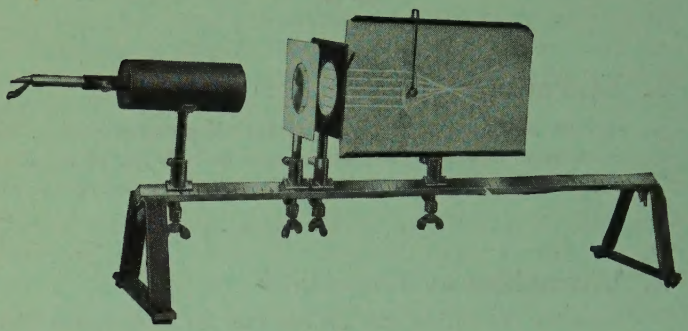
Fritz Stenfelt i TfSL

B

SVENSKA BOKFÖRLAGET

Lärarexemplar genom SKOLBOKCENTRALEN

STOCKHOLM · GÖTEBORG · MALMÖ · LINKÖPING · LULEÅ · SUNDSVALL



Med Norstedts experimentsats för optik

kan alla demonstrationsförsök utföras, som ingår i folkskolans och realskolans kurs. En utförlig handledning med illustrationer gör försöken lätta att utföra utan tidsödande förberedelser. Pris inklusive specialinredd förvaringslåda av trä endast 285:—

Med kompletteringsdetaljer täcker optiksatsen även hela gymnasiets kurs

NORSTEDTS SKOLAVDELNING

STOCKHOLM · GÖTEBORG · MALMÖ · LINKÖPING · LULEÅ · SUNDSVALL

Lund 1959, Håkan Ohlssons Boktryckeri